



WSTĘP  
DO FIZYKI  
JADRA  
ATOMOWEGO  
Wykład – 9

Wiedza i Życie

IV ROK FIZYKI - semestr zimowy  
Janusz Braziewicz - Zakład Fizyki Medycznej IF AŚ

# Siły jądrowe

działające pomiędzy poszczególnymi nukleonami

## Własności:

- klasyczne oddziaływania nie mogą wyjaśnić sił wiążących nukleony w jądra - są zbyt słabe
- żaden rodzaj nukleonów nie jest uprzywilejowany -
- są ładunkowo-symetryczne, tzn. że siły te są niezależne od ładunku p-p=n-n=n-p
- są krótkozasięgowe: ( $\sim 10^{-13}$  cm)
- mają własności wysycania
- ogólnie podlegają nim hadrony i czasami takie oddziaływania nazywa się hadronowym

# Teoria sił jądrowych

Założenia:

- siły jądrowe są dobrze przedstawione przez oddziaływania pomiędzy dwoma nukleonami
- oddziaływania te opisuje pewien potencjał spełniający warunki symetrii i niezmienniczości

## szukanie formy tego potencjału

- **kierunek fenomenologiczny** - szukamy takiej formy, która dobrze odtwarza dane eksperymentalne
- **kierunek teorii pola** - staramy się znaleźć bardziej fundamentalne wyjaśnienie sił jądrowych, zakładając, że oddziaływanie pomiędzy nukleonami następuje za pośrednictwem pola sił

# Oddziaływanie jądrowe w układzie nukleon-nukleon

D najprostszy układ dwunukleonowy.

Jego własności:

masa = 2.01410222 u

energia wiązania = -2.22464 MeV

spin = 1

moment kwadrupolowy =  $2.86 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$

moment magnetyczny  $\mu = 0.857393$

$$\sum_{p,n} \mu = 0.87975$$

spiny p i n równoległe

D w stanie podstawowym jest w stanie  ${}^3S_1$  lub  ${}^3D_1$

mały - niewielka deformacja jądra

- masa =  $2.01410222$  u – można ją wyznaczyć metodami spektroskopii masowej
- energia wiązania =  $-2.22464$  MeV – można ją wyznaczyć w sposób bezpośredni, np. przez pomiar energii koniecznej do zajścia reakcji fotorozszczepienia  $D+\gamma\rightarrow n+p$  lub poprzez pomiar energii promieniowania  $\gamma$  towarzyszącego reakcjom wychwytu (promieniowanie to występuje powszechnie w otoczeniu reaktorów jądrowych)
- spin = 1- wynika z obserwacji struktury nadsubtelnej
- moment magnetyczny  $\mu = 0.857393$  – można wyznaczyć metodami rezonansu jądrowego. Suma momentów magnetycznych wynosiłaby  $0.87975$
- bardzo mały moment kwadrupolowy =  $2.86 \cdot 10^{-27}$  cm<sup>2</sup> – wyznaczony na podstawie odchyień rzeczywistej zależności zeemanowskiego rozszczepienia linii struktury nadsubtelnej od natężenia pola magnetycznego w stosunku do zależności oczekiwanej w przypadku układu o symetrii kulistej

## ważne wnioski odnośnie natury siły p-n wynikające z przedstawionych własności

- ponieważ spin D wynosi 1, spiny protonu i neutronu muszą być równoległe, czyli składać się w stan trypletowy
- ponieważ moment magnetyczny D jest bliski sumie momentów p i n, jego wielkość daje się w pierwszym przybliżeniu zrozumieć bez uwzględniania przyczynku pochodzącego od orbitalnego momentu pędu. Znaczy to, że D w stanie podstawowym znajduje się zasadniczo w stanie  $^3S_1$  (symbolika spektroskopii atomowej  $^{2S+1}L_I$ )
- Promień D wynosi  $R=4.3$  fm i jego powierzchnia  $600 \cdot 10^{-27}$  cm<sup>2</sup> i jest dużo większa od wartości elektrycznego momentu kwadrupolowego, co oznacza że kształt D jest niewiele różny od kulistego, więc może być opisany przez potencjał centralny

## ważne wnioski odnośnie natury siły p-n wynikające z przedstawionych własności

- mały moment kwadrupolowy oznacza jednak pewną deformację deuteronu
- jednym naturalnym kierunkiem w deuteronie jest kierunek jego spinu, więc deformacja musi pochodzić od tej części oddziaływania, która zależy od spinu cząstek i to w taki sposób, że oddziaływanie to odbija się na radialnej składowej funkcji falowej – czyli istnieje niewielki przyczynek pochodzący od siły niecentralnej
- działanie siły niecentralnej sprawia, że do stanu podstawowego dodaje się pewien niewielki przyczynek stanu o większej wartości momentu pędu
- z zasady zachowania parzystości wynika, że deuteron może zawierać domieszkę stanu  ${}^3D_1$

Funkcja falowa deuteronu może być przedstawiona jako

$$\Psi = \alpha_0 \Psi({}^3S_1) + \alpha_2 \Psi({}^3D_1), \quad |\alpha_0|^2 = 0.96, \quad |\alpha_2|^2 = 0.04$$

Zaniedbując stan  ${}^3D_1$

(zaniedbując niecentralną część potencjału)

otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)]u(r) = 0, \quad \text{gdzie } u(r) = r\Psi(r), \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n}$$

$E = -B = 2.2$  MeV jest energią wiązania

Warunki brzegowe dla  $u(r) = 0$  dla  $r=0$  i  $r=\infty$

rozwiązaniem jest



$$u_1 = A_1 \sin k_1 R, \quad k_1 = \frac{1}{\eta} \sqrt{m(E - V)}$$


dla  $r < R_0$

$$u_2 = A_2 e^{-r/R}, \quad k_2 = \frac{i}{\eta} \sqrt{mB}, \quad R = \eta / \sqrt{mB}$$

dla  $r \geq R_0$

warunek ciągłości dla rozwiązań i pochodnych w  $r=R_0$  daje związek między głębokością i promieniem  $R_0$  studni potencjału

$$k_1 \operatorname{ctg} k_1 R_0 = - \frac{1}{R}$$


$$\operatorname{ctg} \left[ \frac{m(V_0 - B)R_0^2}{\eta^2} \right] = - \left[ \frac{B}{V_0 - B} \right]^{1/2}$$

przyjmując  $R_0=1.4$  fm i  $B=2.2$  MeV

otrzymamy  $V_0 \sim 50$  MeV

dla  $V_0 \gg B$  równanie  $\text{ctg} \left[ \frac{m(V_0 - B)R_0^2}{\eta^2} \right] = - \left[ \frac{B}{V_0 - B} \right]^{1/2}$  przybiera postać

$$\left( \frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{mV_0R_0^2}{\eta^2}, \quad V_0 = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\eta^2}{mR_0^2}, \quad V_0 \approx \frac{100}{R_0^2}$$

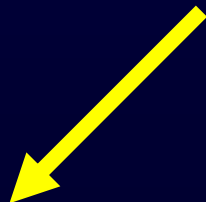
im krótszy jest zasięg potencjału tym większa musi być jego głębokość

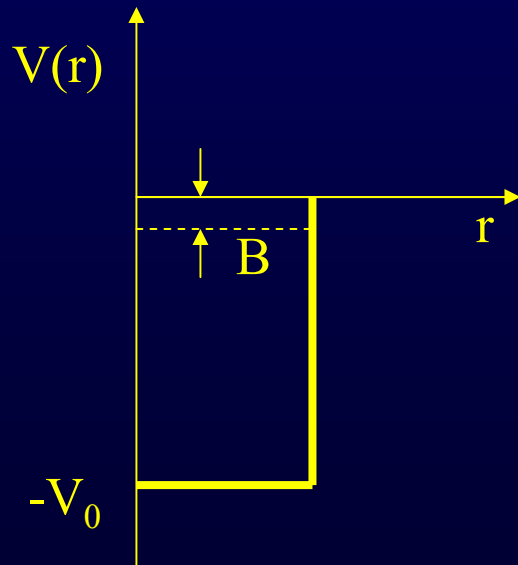
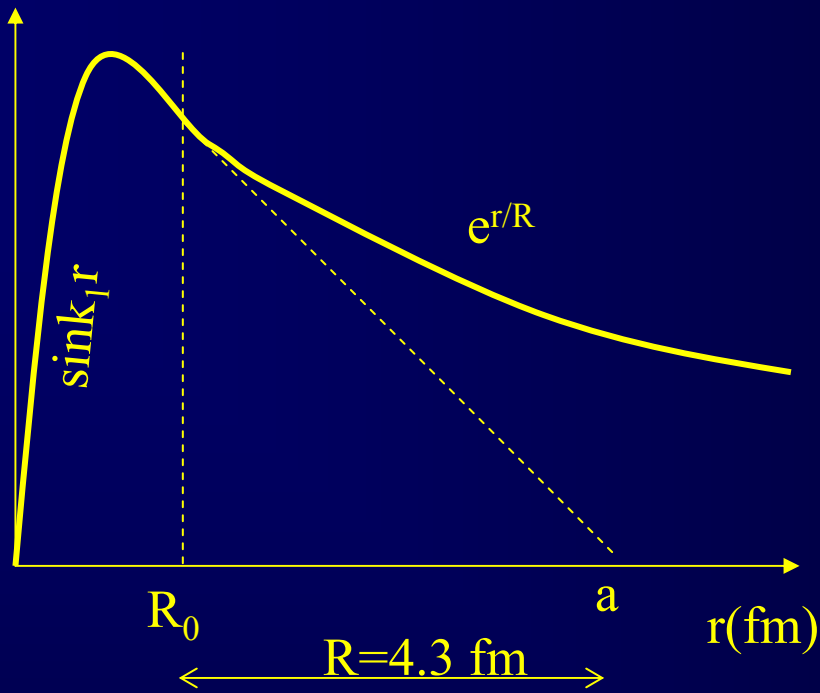
Jak wynika z

$$u_2 = A_2 e^{-r/R}, \quad k^2 = \frac{i}{\eta} \sqrt{mB}, \quad R = \eta / \sqrt{mB} \quad \text{dla } r \geq R_0$$

amplituda funkcji falowej maleje dla  $r=R$  o czynnik  $1/e$ .  
Dlatego  $R$  nazywa się promieniem deuteronu i dla energii wiązania  $2.2 \text{ MeV}$  otrzymujemy  $R=4.3 \text{ fm}$  czyli więcej niż zasięg sił jądrowych

*Przebieg funkcji  $u(r)$ . Wewnątrz  $R_0$  wzrasta jak funkcja sinus i maleje wykładniczo na zewnątrz*





*Przebieg funkcji  $u(r)$ . Wewnątrz  $R_0$  wzrasta jak funkcja sinus i maleje wykładniczo na zewnątrz*

- gęstość prawdopodobieństwa, że odległość między p i n wynosi r jest  $\sim$  do  $|u(r)|^2/r^2$
- po unormowaniu funkcji falowej okazuje się, że całka po obszarze zewnętrznym  $r > R_0$  ma wartość większą niż całka po obszarze wewnętrznym  $r < R_0$
- przy wszystkich rozsądnych założeniach co do wartości  $R_0$  otrzymujemy, że odległość między protonem i neutronem jest przez większą część czasu większa od zasięgu sił  $R_0$ . Ma to swoje odbicie w małej wartości energii wiązania 1.1 MeV/A.

wnioski pozostają niezmiennie, gdy wstawimy bardziej realistyczną formę potencjału:

- wykładniczy

$$V(r) = -V_o e^{-r/R_o}$$

- gaussowski

$$V(r) = -V_o e^{-r^2/R_o^2}$$

- Yukawy

$$V(r) = -V_o \frac{r}{R_o} e^{-r/R_o}$$

# Rozpraszanie nukleon-nukleon

## Zależność sił jądrowych od spinu

- nie istnienie singletowego stanu związanego deuteronu wskazuje na zależność siły działającej między p i n od spinu
- dokładniejsze informacje dostarcza rozpraszanie neutron-proton przy małych energiach
- takie rozpraszanie to przypadek rozpraszania czystych fal s – rozpraszanie jest wówczas izotropowe i wystarcza podanie całkowitego przekroju czynnego

$$\sigma_0 = 4\pi\Delta^2 \sin^2 \delta_0 = 4\pi|f_0|^2$$

- gdy energia neutronów jest wystarczająco mała to przekrój czynny jest dany przez kwadrat długości rozpraszania

$$\sigma_0 = 4\pi a^2$$

- długość rozpraszania łatwo wyznaczyć z rozwiązania

$$u_2 = A_2 e^{-r/R}, \quad k_2 = \frac{i}{\eta} \sqrt{mB}, \quad R = \eta / \sqrt{mB}$$

dla  $r \geq R_0$

w punkcie  $R_0$  należy wykreślić styczną do funkcji falowej o nachyleniu  $(du_2/dr)_{r=R_0}$  i wyznaczyć jej punkt przecięcia z osią  $r$ .

- dla najbardziej realistycznego potencjału Youkawy wartość  $\sigma_0$  nie przekracza 9 b
- odpowiednie eksperymenty dają wartość  $\sigma_0 = 20.3$  b



## wytłumaczenie rozbieżności podane przez Wignera

- w D oba spiny ustawione są równoległe
- w pomiarach niespolaryzowanych neutronów możliwe równoległe i antyrównoległe ustawienia
- przy rozpraszaniu istnieją więc trzy możliwe stany trypletowe z wagą statystyczną  $\frac{3}{4}$  i jeden stan singletowy z wagą  $\frac{1}{4}$
- jeśli siły jądrowe zależą od spinu, to potencjał rozpraszania, a tym samym przekrój czynny, są dla obu procesów różne
- należy więc zapisać, że

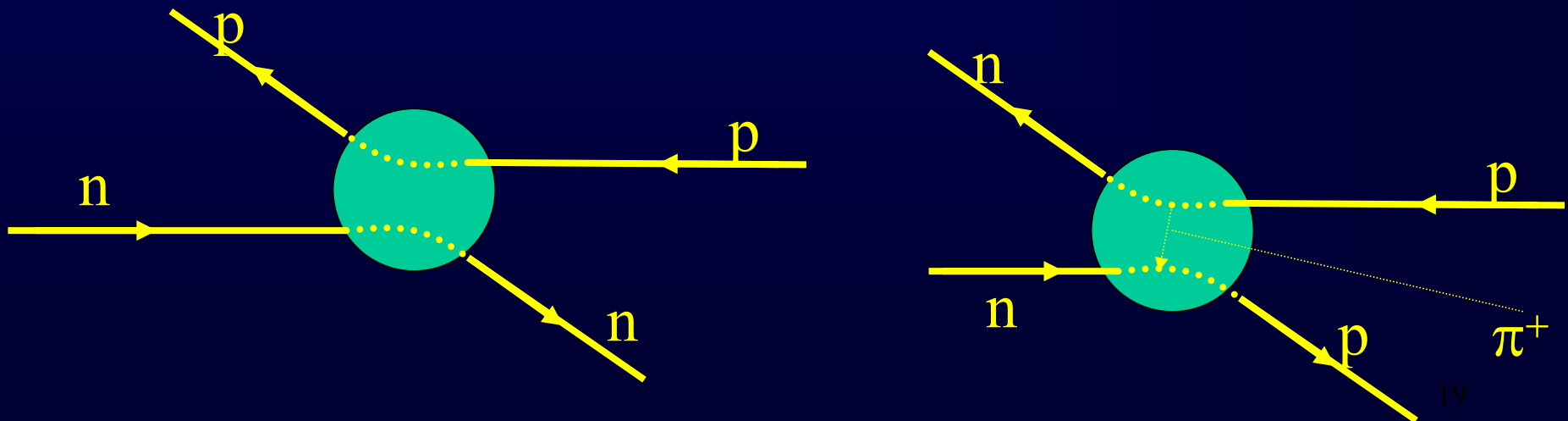
$$\sigma_0 = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s = 20.3 \text{ b}$$

- przekrój  $\sigma_s$  otrzymamy ze zmierzonego  $\sigma_0$  po podstawieniu na  $\sigma_t$  wartości obliczonej dla potencjału deuteronu, tj.  $\sigma_t = 4.4\text{b}$
- otrzymujemy  $\sigma_s = 68\text{b}$  – zasadniczy wkład pochodzi od stanów singletowych, nie realizowanych w deuteronie

- istotny wynik
- siła działająca pomiędzy protonem i neutronem zależy od wzajemnej orientacji ich spinów
- siła ta ma tę własność, że tworzy stan związany tylko przy spinach równoległych
- mała wartość momentu kwadrupolowego deuteronu świadczy o zasadniczo centralnym charakterze tej siły, mamy do czynienia z siłą centralną zależną od spinu
- oddziaływanie takie jest całkowicie odmienne od oddziaływania dipol-dipol i nie ma odpowiednika ani w fizyce klasycznej ani w fizyce atomowej
  
- ten wynik eksperymentalny nic nie mówi o szczegółowym przebiegu potencjału
- dodatkowych informacji udzieli rozpraszanie neutronów o krótszych falach

## rozpraszanie neutronów o krótszych falach

- wchodzą wówczas w grę duże wartości momentów pędu i rozpraszanie przestaje być izotropowe
- analiza rozpraszania w przybliżeniu Borna wykazuje, że w przypadku prostokątnego potencjału większość cząstek jest rozpraszana w przód
- eksperymentalne rozkłady kątowe dla rozpraszanych neutronów na protonach w tym zakresie energii wykazują, że natężenie cząstek rozproszonych w tył silnie wzrasta z kątem rozproszenia.
- zjawisko to można wytłumaczyć tym, że oddziaływanie jest związane z wymianą mezonu  $\pi$



# Zależność sił jądrowych od ładunku

- czy dla rozproszeń n-n, p-p można stosować ten sam potencjał co dla rozproszeń n-p?
- w przypadku rozproszeń n-n i p-p mamy do czynienia z rozpraszaniem cząstek identycznych
- w wyrażeniu na przekrój czynny występują wówczas dodatkowe wyrazy charakterystyczne dla rozpraszania identycznych fermionów
- w przypadku rozpraszania protonów, do amplitudy rozpraszania sił jądrowych dodaje się ponadto amplituda rozpraszania kulombowskiego
- analiza obserwowanych wartości przekrojów czynnych uwzględniająca oba te efekty daje w przybliżeniu takie same wyniki dla wszystkich trzech możliwych kombinacji nukleonów



jednoznacznie

- przekrój czynny na rozpraszania nie zależy od ładunku nukleonów
- siły jądrowe są niezależne od ładunku elektrycznego



- z punktu widzenia zasady Pauliego proton i neutron nie są cząstkami identycznymi
- siły jądrowe działające między obiema cząstkami nie uległyby zmianie, gdybyśmy wyłączyli oddziaływanie kulombowskie i z tego punktu widzenia są cząstkami identycznymi

- proton i neutron są tu cząstkami rozróżnialnymi poprzez składową nowego wektora – izospinu – mającego wszelkie matematyczne własności momentu pędu, ale określonego w abstrakcyjnej przestrzeni izospinowej
- pojęcie izospinu odgrywa bardzo ważną rolę w fizyce cząstek elementarnych – u podstaw jego koncepcji leży możliwość bezpośredniego zastosowania do jego opisu formalizmu matematycznego stosowanego w przypadku zwykłego spinu

# Siły jądrowe

Ich cechy wynikające z obserwacji to:

- istnieje siła centralna
- istnieje siła centralna zależna od spinu
- istnieje siła niecentralna
  - siły jądrowe są z dobrym przybliżeniem niezależne od ładunku

Jaki jest kształt siły działającej między dwoma nukleonami?

# Jaki jest kształt siły działającej między dwoma nukleonami?

Eisenbud i Wigner założyli:

- niezmienniczość względem przesunięcia
- niezmienniczość względem transformacji Galileusza
- niezmienniczość względem obrotu
- niezmienniczość względem wymiany cząstek
- symetrię ładunkową
- co najwyżej liniowa zależność od pędu  $p$



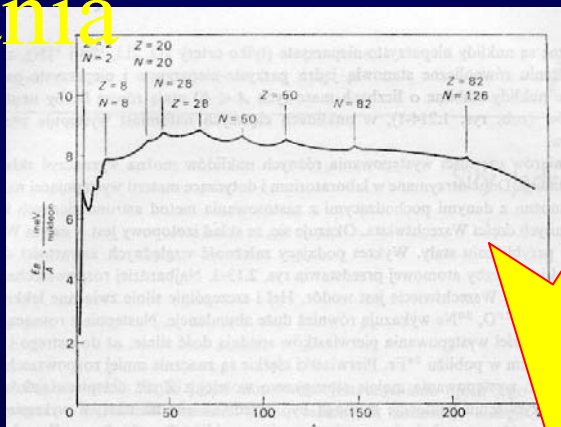


# Liczby magiczne

2 8 20 28 50 82 126

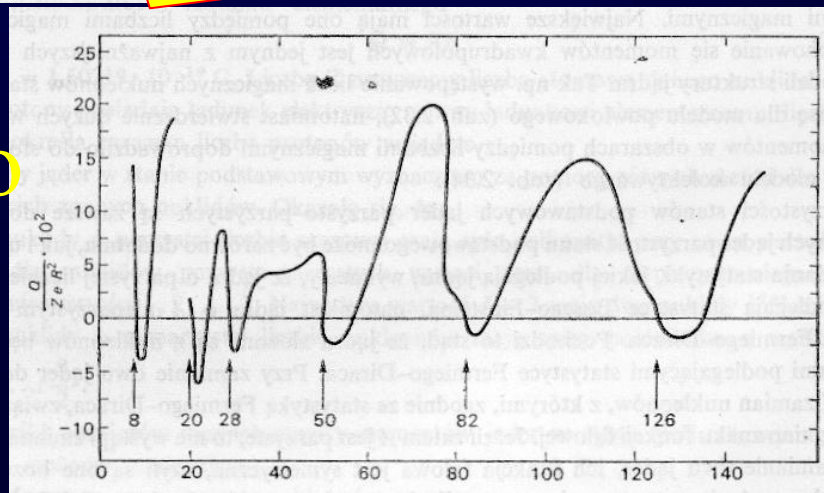
tu:

- duża energia wiązania



Wyjaśnia

- zerowa wartość kwadrupolowego momentu elektrycznego



# Model powłokowy jądra

to model struktury jądra

## Założenie:

poszczególne nukleony poruszają się niezależnie w uśrednionym na wszystkie oddziaływania **statycznym i sferycznie symetrycznym** potencjale.

## Zadanie:

znaleźć układ poziomów energetycznych i pokazać, że mamy tu strukturę powłokową.

**Rozkład poziomów** zależy od kształtu potencjału,

a ten winien być zbliżony do

rozkładu materii w jądrze,

czyli

$$V(r) = V_0 \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

dodatkowo dla protonów uśredniony **potencjał**

**kulombowski**

$$V_c(r) =$$

$$Ze^2 / r$$

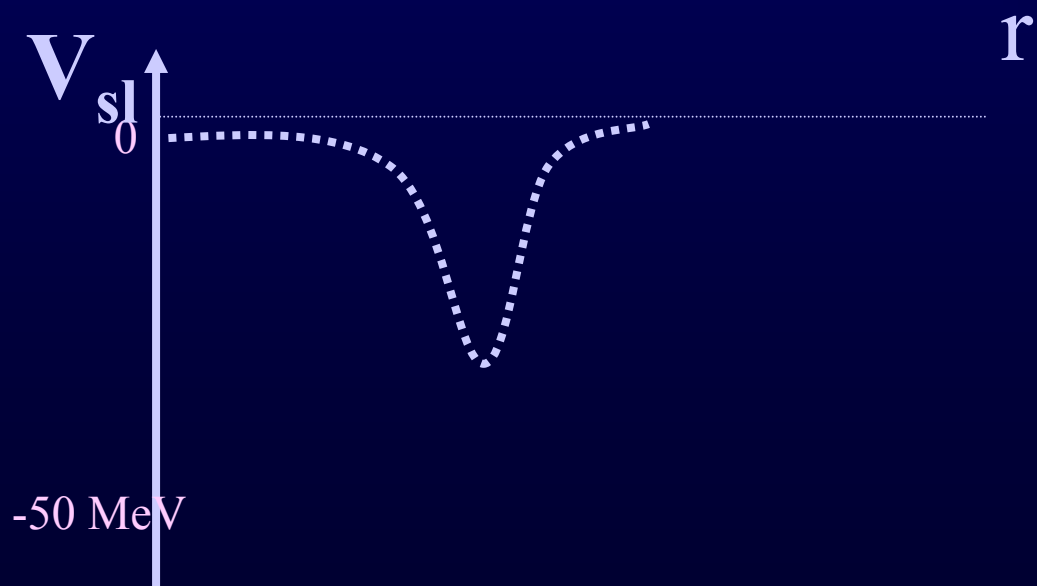
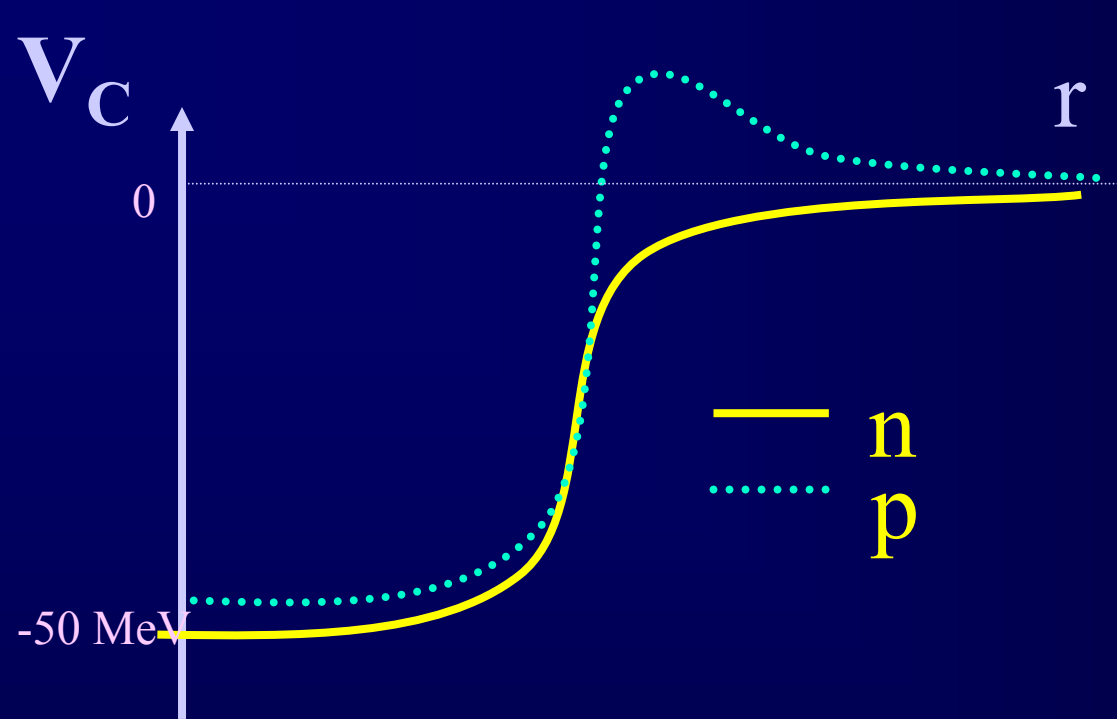
dla  $r > R_c$  - na zewnątrz

$$\frac{Ze^2}{2R_c} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R_c} \right) \right]$$

dla  $r < R_c$  - wewnątrz

i dla części centralnej **potencjał**  
**oddziaływania spin-orbita**

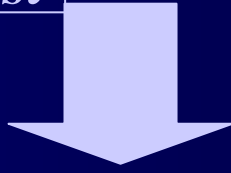
$$V_{sl}(r) = -\lambda \frac{1}{r} \left( \frac{dV(r)}{dr} \right) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$



Mając potencjał możemy rozwiązać  
równanie Schrödingera

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_C(r) + V_{sl}(r) \right] \Psi(r) = E \Psi(r)$$

jeśli pominiemy  $V_{sl}$



Rozwiązanie daje **stany energetyczne** opisywane :

- **radialną** liczbą kwantową

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

- liczbą kwantową **orbitalnego momentu pędu**

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

**obsadzone  $2(2l+1)$  nukleonów**

- przy czym poziomy mają tę samą wartość

głównej liczby kwantowej  **$n = l + r$**

		...	70,	112
2	p	—————	6	40
1	f	—————	14	

2	s	—————	2	<b>20</b>
1	d	—————	10	

1	p	—————	6	<b>8</b>
---	---	-------	---	----------

1	s	—————	2	<b>2</b>
---	---	-------	---	----------

**r l**

tylko trzy liczby  
magiczne  
poprawnie  
opisywane

oznaczenia zapożyczone  
ze spektroskopii

$N_1$   $\Sigma N_1$

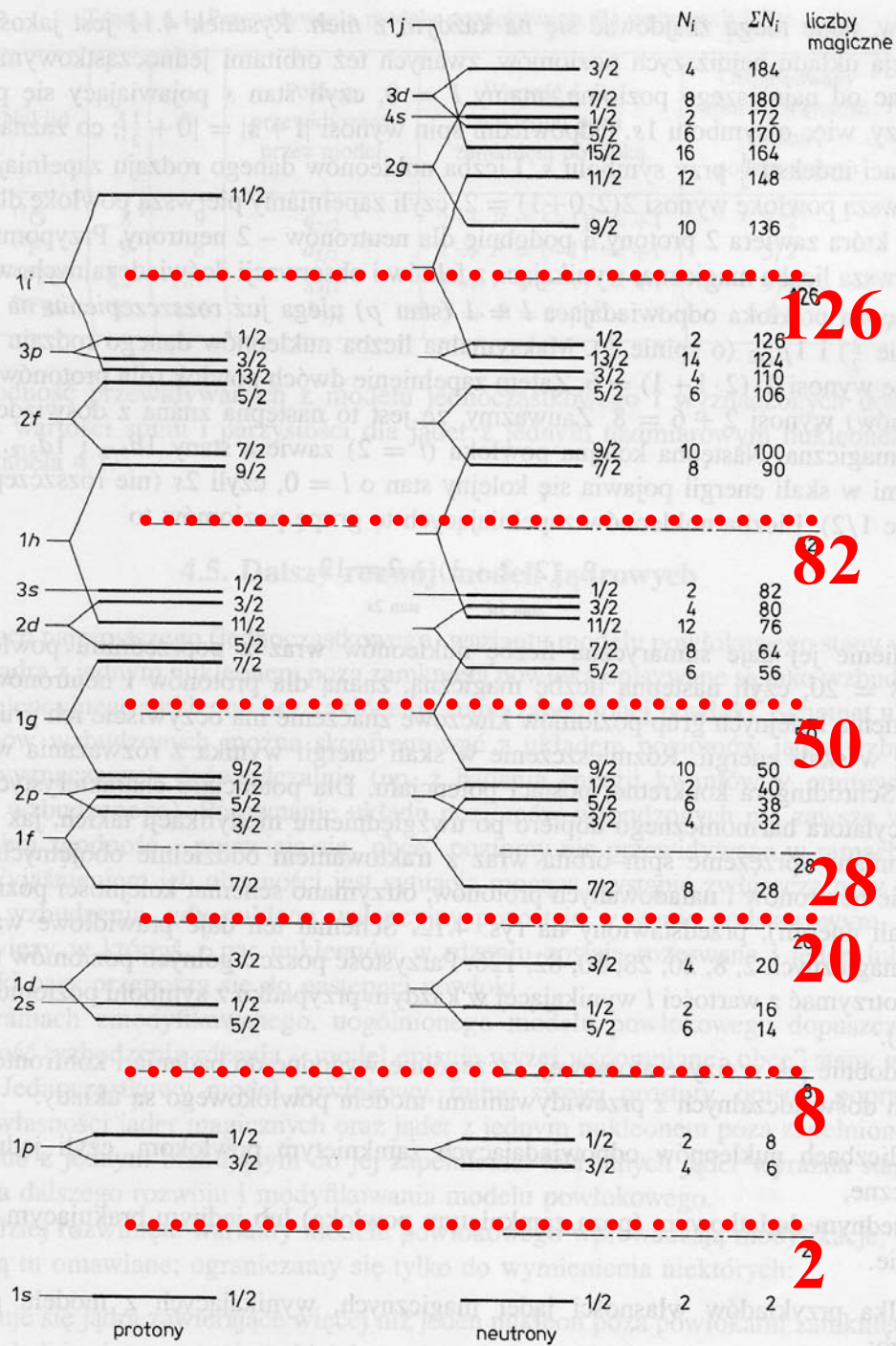


*jeśli uwzględnimy  $V_{sl}$*

każdy ze stanów o określonym  $l$   
rozpadnie się na dwa poziomy o różnych  
wartościach energii i całkowitego  
momentu pędu  $j=l+s$

1	g		10	<b>50</b>	$1g_{7/2}$ $1g_{9/2}$ $2p_{1/2}$
2	p		6		$1f_{5/2}$ $2p_{3/2}$
1	f		4		$1f_{7/2}$
			8	<b>28</b>	
			4	<b>20</b>	$1d_{3/2}$
1	d		2		$2s_{1/2}$ $1d_{5/2}$
2	s		6		
			2	<b>8</b>	$1p_{1/2}$ $1p_{3/2}$
			4		
1	s		2	<b>2</b>	$1s_{1/2}$
			$N_j$	$\Sigma N_j$	

otrzymujemy  
powłoki



**Model powłokowy z uwzględnieniem oddziaływania spin-orbita dobrze tłumaczy liczby magiczne**

**dla dużej liczby nukleonów walencyjnych nie wyjaśnia jednak poprawnie struktury poziomów wzbudzonych.**

# **Modele jądra oparte na modelu powłokowym**

- model jednocząstkowy**
- model jednocząstkowy o wielu nukleonach poza zapełnioną orbitą**
- model niezależnych cząstek**

- model powłokowy z potencjałem symetrycznym nadaje się dobrze do opisu jąder z całkowicie lub prawie całkowicie wypełnionymi powłokami nukleonowymi
- dla dużej liczby nukleonów poza powłoką zapełnioną stany nukleonów walencyjnych są w dużym stopniu określone przez oddziaływania resztkowe – tu model powłokowy nie pozwala na wyjaśnienie struktury poziomów wzbudzonych



- w widmach wzbudzenia pojawiają się pewne prawidłowości, świadczące że stany wzbudzone są związane ze skorelowanymi ruchami kolektywnymi wszystkich nukleonów
- za korelację ruchów odpowiedzialna jest długozasięgowa składowa sił jądrowych

# Model kolektywny jądra

## Założenie:

- wypełnione powłoki tworzą ‘rdzeń’
- nukleony zewnętrzne ‘walencyjne’ wnoszą tylko przyczynek do średniego potencjału
- **oddziaływania ‘resztkowe’** między nukleonami walencyjnymi określają energie stanów
- przy dużej liczbie nukleonów walencyjnych pojawić się mogą **korelacje** prowadzące do **ruchów kolektywnych** odpowiedzialnych za zmiany kształtu jądra

Jedyny kolektywny ruch nukleonów możliwy w jądrze sferycznie symetrycznym odpowiada oscylacjom powierzchniowym.

Jeżeli jądro wyobrazimy sobie jako kroplę cieczy, to oscylacje będą odpowiadały niewielkim elastycznym odkształceniom kropli od kulistego kształtu równowagi.



# znowu analogia do kropli cieczy

powierzchnia drgającej kropli  
opisana jest przez

$$R(\vartheta, \varphi) = R_o \left[ 1 + \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda, \mu} Y_l^\mu(\vartheta, \varphi) \right]$$

$Y_l^\mu$  - funkcja sferyczna

$R_o$  - średni promień kuli  
równoważnej

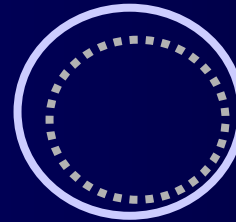
$a_{\lambda, \mu}$  - parametry deformacji

$\lambda$  - rząd deformacji

# rząd deformacji:

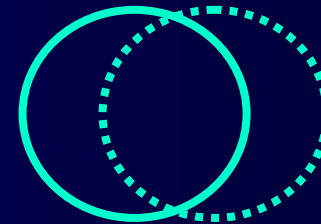
$\lambda=0$  kształt kulisty

deformacja monopolowa



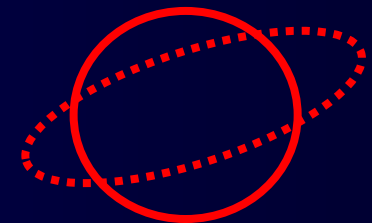
$\lambda=1$  ruch translacyjny

deformacja dipolowa



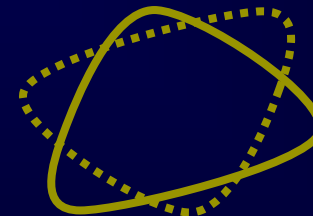
$\lambda=2$  oscylacje kwadrupolowe

deformacja kwadrupolowa



$\lambda=3$  oscylacje oktupolowe

deformacja oktupolowa



dla  $\lambda=2$        $\mu = -2, -1, 0, +1, +2$

mamy 5 niezależnych  
form oscylacji

Każdemu odpowiada **energia oscylacyjna**

$$H_{osc} = \frac{1}{2} B_{\lambda} \left| \dot{a}_{\lambda, \mu} \right|^2 + \frac{1}{2} C_{\lambda} \left| a_{\lambda, \mu} \right|^2$$

$B_{\lambda}$  - masa bezwładna

$C_{\lambda}$  - siła elastyczna

$\omega_{\lambda} = \sqrt{C_{\lambda} / B_{\lambda}}$  - częstość drgań

$\eta \omega_{\lambda}$  - energia drgań

oscylacje są więc eksperymentalnie obserwowane poprzez rejestrację sekwencji wzbudzonych poziomów o odpowiadającej im energii, spinie 2 i parzystości „+”.



$$(-1)^\lambda$$

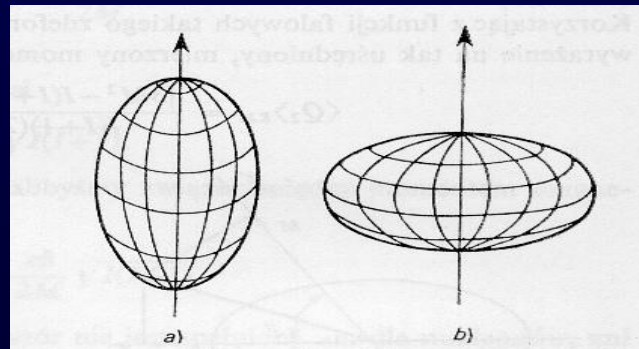
<sup>76</sup>Se

- w miarę zwiększania liczby nukleonów walencyjnych jądro wskutek działania sił pairingu zachowuje kształt kulisty, lecz staje się bardziej podatne na odkształcenia.

- przy dostatecznie dużej ich liczbie obserwujemy trwałą deformację jądra.
- posiada ono na ogół symetrię osiową i opisuje się go zwykle jak elipsoidę obrotową o półosiach  $a$  i  $b$

$$R = 1/2(a+b) \quad \Delta R = a-b$$

parametr deformacji  $\beta = \Delta R/R$



$$\beta > 0$$

$$\beta < 0$$

- zdeformowane jądro wykonuje **kolektywne ruchy rotacyjne**
- są one znacznie wolniejsze od ruchów nukleonów i dlatego uzyskujemy rotację jądra z zachowaniem jego wewnętrznej struktury

Z rotacją związana jest energia, która klasycznie ma postać

$$E = K^2 / 2J$$

gdzie  $K$ -kręt,  $J$ -moment bezwładności wirującej bryły

kwantowo  $K^2 = \eta^2 I(I + 1)$



$$E_I = \frac{\eta^2}{2J} I(I + 1)$$

$$I = 0, 2, 4, 6, 8$$



$$E_2:E_4:E_6:E_8:\dots=3:10:21:36:\dots$$

*Eksperymentalne widmo  $^{170}\text{Hf}$*

eksperymentalnie - J mniejsze  
od momentu bezwładności  
ciała sztywnego  
odpowiadającego danemu  
jądru

rotacja związana jest ze  
stosunkowo złożonymi  
ruchami nukleonów

