



WSTĘP
DO FIZYKI
JADRA
ATOMOWEGO

Wykład – 7-8

Wiedza i Życie

IV ROK FIZYKI - semestr zimowy
Janusz Braziewicz - Zakład Fizyki Medycznej IF AŚ

Rozpraszanie elastyczne

- odgrywa zasadniczą rolę w fizyce jądrowej i cząstek elementarnych
- to rozpraszanie, w którym nie ulegają wzbudzeniu żadne wewnętrzne stopnie swobody parametrów zderzenia i całkowita energia kinetyczna pozostaje stała
- to rozpraszanie towarzyszy nieodmiennie wszystkim reakcjom jądrowym

Opis w układzie CM, gdyż:

- suma pędów przed i po zderzeniu jest równa zero
- cząstki rozbiegają się po zderzeniu pod kątem 180°
- istnieje tylko jeden kąt rozpraszania θ
- energia kinetyczna dana jest przez

$$E = m_r V^2 / 2$$

gdzie v jest prędkością względną, a m_r masą zredukowaną
 $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

- w tym układzie problem rozpraszania to rozpraszanie jednej cząstki o zredukowanej masie m_r na centrum siły zlokalizowanym w początku układu współrzędnych

dalej $m \equiv m_r$

Stacjonarny opis rozpraszania elastycznego

Pytanie o kątowy rozkład elastycznie rozproszonych
cząstek przy zadanym potencjale rozpraszającym

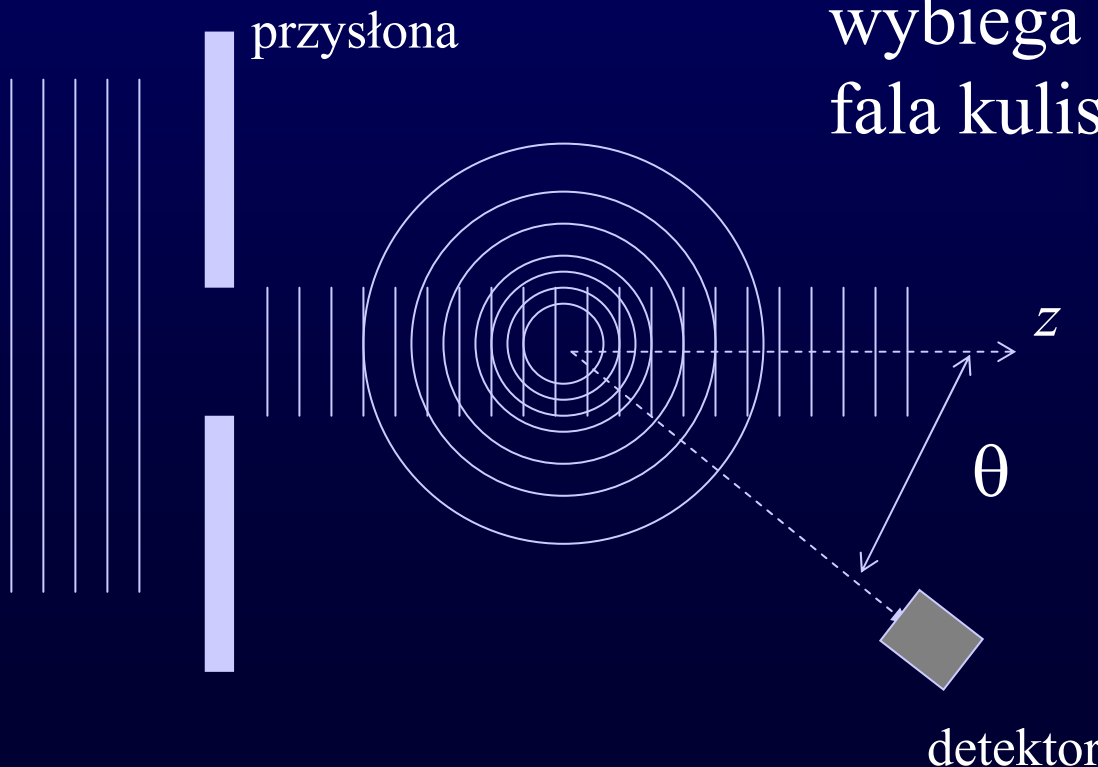
Założenie

- mamy do czynienia z lokalnym potencjałem centralnym
(siła działa zawsze w kierunku centrum rozpraszającego)
- potencjał winien być krótkozasięgowy
(w praktyce wystarczy założenie, że w dużych odległościach od centrum rozpraszającego potencjał maleje silniej niż $1/r$)
- w mechanice klasycznej proces zależy od czasu
(w kwantowej oznacza to, że mamy do czynienia z pakietami falowymi – nadbiegający pakiet po spotkaniu centrum rozpraszającego rozchodzi się jako pakiet fal kulistych)

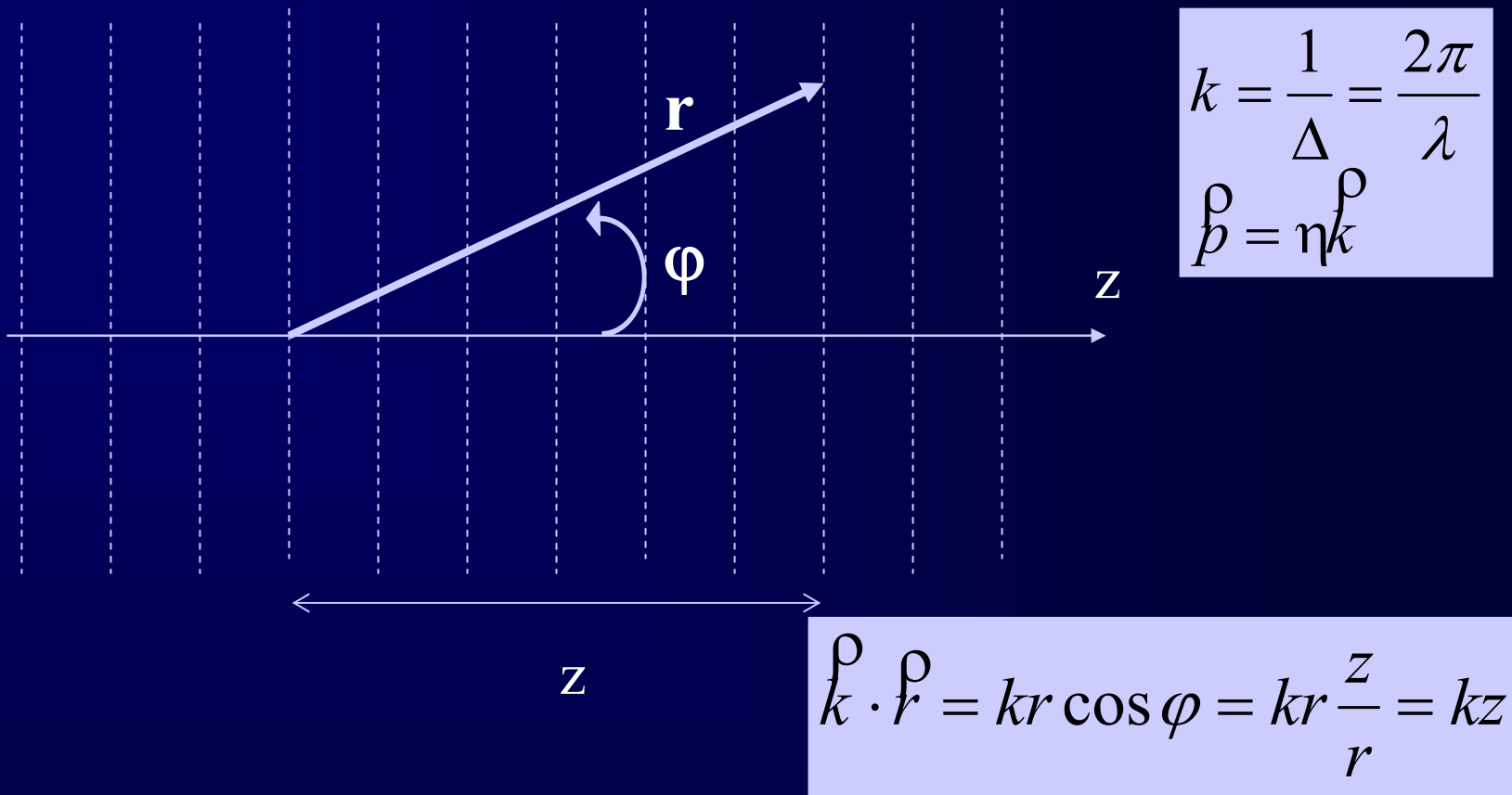
- graniczny przypadek – wiązka biegnąca w kierunku osi z mająca dokładnie określone wartości energii

(dokładnie określony pęd p_z pociąga za sobą duże rozmycie fali z kierunku z – rozpraszanie można więc przez pewien czas traktować jako stacjonarne. Ponieważ zachodzi też $p_x = p_y = 0 = \eta / \Delta_x = \eta / \Delta_y$ to $\Delta_x, \Delta_y \rightarrow \infty$ i falę możemy traktować jako falę płaską

- z centrum rozpraszającego wybiega następnie stacjonarna fala kulista



Padająca fala płaska i rozbiegająca się fala kulista w rozpraszaniu elastycznym.



Fala płaska – linia przerywana to kolejne czoła fal.

Fala płaska nadbiegająca (i rozchodząca się w kierunku z
to

$$\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \xrightarrow{\text{processtacjonarny}} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r})] = \exp[i(kz)]$$

Fala kulista rozbiegająca się
to

$$\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) / r$$

Całkowita funkcja falowa dla procesu stacjonarnego poza obszarem oddziaływania to

$$\psi_T(\mathbf{r}) = A \left[e^{ikz} + f(\theta) e^{ik \cdot \mathbf{r}} / r \right]$$

Zależność amplitudy fali rozproszonej od kąta rozproszenia θ

Określony przez warunki brzegowe i warunek normalizacji

Rozwiązanie problemu to znalezienie funkcji falowej przy zadanym potencjale

Związek $f(\theta) - (d\sigma/d\Omega)$ eksperymentalnie mierzona

- gęstość cząstek P (cm^{-3}) dana przez $P = \Psi^* \Psi$
- strumień cząstek padających z prędkością v_e wynosi
 $j_e = v_e P$ ($\text{s}^{-1} \text{cm}^{-2}$)
- dla fali padającej zachodzi $P = |Ae^{ikz}|^2 = A^2$ więc $j_e = A^2 v_e$
- strumień cząstek rozproszonych – j_a – to to strumień dI cząstek przepływających przez element powierzchni dF dany przez

$$j_a dF = v_a |\psi_a|^2 dF = v_a \left| A f(\theta) e^{ikr} / r \right|^2 dF = v_a A^2 |f(\theta)|^2 dF / r^2 \quad (\text{s}^{-1})$$

- ponieważ $dF = r^2 d\Omega$ to

$$j_a dF = v_a A^2 |f(\theta)|^2 d\Omega$$

- różniczkowy przekrój czynny

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{j_a dF}{j_e} \xrightarrow{v_e=v_a} |f(\theta)|^2$$

jest równy kwadratowi modułu amplitudy rozpraszania

- formalnie otrzymamy to również posługując się kwantowym wyrażeniem na strumień cząstek

$$j = \frac{\eta}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*]$$

By odpowiedzieć na

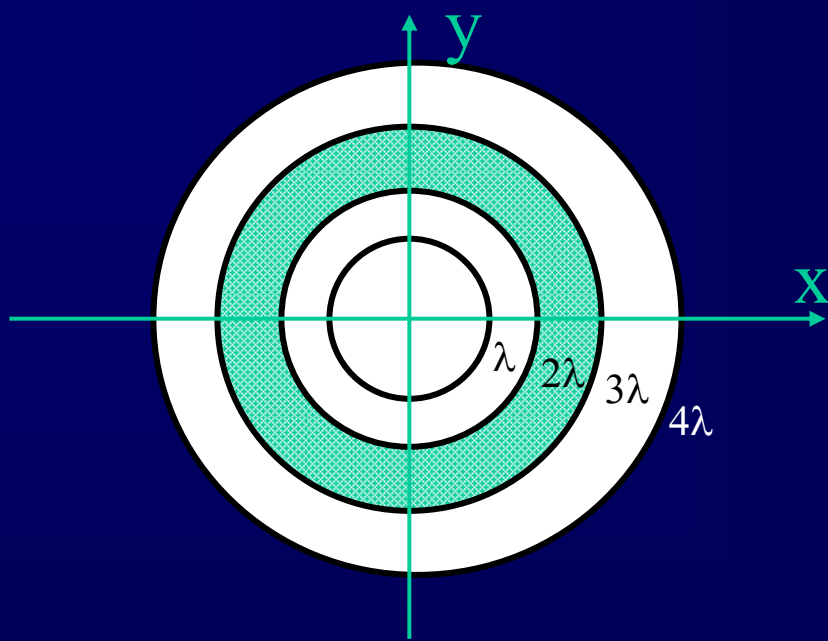
pytanie o kątowny rozkład elastycznie rozproszonych

cząstek przy zadanym potencjale rozpraszającym

trzeba wyznaczyć amplitudę rozpraszania $f(\theta)$

Rozkład na fale cząstkowe

- punktem wyjścia do rozwiązania zagadnienia rozpraszania Rutherforda jest parametr zderzenia b
- w klasycznym opisie zderzenia każdej wartości b odpowiada dokładnie określony kąt rozproszenia θ
- strumień cząstek padających dzielimy na strefy koncentryczne o promieniach zawartych między b i $b+db$ i dla każdej strefy określa się odpowiedni zakres kątów rozproszenia
- w przypadku kwantowym postępuje się podobnie
- ponieważ pęd \mathbf{p} jest jednakowy dla wszystkich padających cząstek to cząstka o parametrze zderzenia b ma moment pędu $\mathbf{b} \times \mathbf{p}$
- rozkład na poszczególne strefy odpowiada parametryzacji padających cząstek względem ich momentów pędu



Rozkład wiązki padającej na strefy koncentryczne w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku biegu wiązki. Jedna ze stref wyróżniona

- dla każdej strefy $p = \eta k = \eta / \Delta$
- cząstka padająca w odległości $b = l\Delta$ ma moment pędu $pb = pl\Delta = l\eta$
- zgodnie z tym klasycznym obrazem cząstki poruszające się w l -tej strefie mają momenty pędu zawarte między

$$l\eta \quad i \quad (l+1)\eta$$

- związany z tą strefą całkowity przekrój czynny σ_l jest równy jej powierzchni

$$\sigma_l = \pi(l+1)^2 \Delta^2 - \pi l^2 \Delta^2 = (2l+1)\pi \Delta^2$$

- dla ustalonej energii (ustalonej długości fali padającej cząstki, tylko od zasięgu potencjału rozpraszania zależy ile różnych wartości l będzie wносить do sumarycznego przekroju czynnego
- dla uzyskania ilościowych informacji należy padającą falę płaską $\exp(ikz)$ rozłożyć na funkcje własne należące do momentu pędu l

- ostateczne rozwinięcie fali płaskiej to

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

gdzie $j_l(kr)$ – sferyczne funkcje Bessela, $P_l(\cos \theta)$ zwykłe wielomiany Legendre'a

- zależność gęstości strumienia cząstek od promienia jest przy ustalonej wartości l opisywana przez $[(2l+1)j_l(kr)]^2$
- dla rosnących l najbardziej prawdopodobna odległość od centrum rozpraszającego staje się coraz większa

- w rozwiązaniu problemu rozpraszania interesuje nas amplituda w dużej odległości od centrum, więc w równaniu

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

zamiast dokładnej postaci funkcji Bessela wstawmy przybliżenie

$$j_l(kr) \xrightarrow{r \gg l\eta} \frac{\sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)}{kr}$$

ponieważ

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}i(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})$$

to

$$j_l(kr) \longrightarrow \frac{i}{2kr} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right]$$



padająca fala płaska opisana w dużej odległości od centrum

$$\psi_e = e^{ikz} = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta)$$

$$\psi_e = e^{ikz} = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos\theta)$$

- padająca fala płaska zapisana została w postaci fal kulistych, o kątowej zależności amplitud opisanej przez $P_l(\cos\theta)$
 - i pierwsza funkcja wykładnicza przedstawia zbiegającą się, a druga rozbiegającą się falę kulistą
- w dużych odległościach od centrum rozpraszającego każde rozwiązanie równania Schrödingera dla cząstki swobodnej można rozwinąć w podobny sposób

to zrobimy to dla całkowitej funkcji falowej ψ_T

$$\psi_T(\mathbf{r}) = A \left[e^{ikz} + f(\theta) e^{ik \cdot \mathbf{r}} / r \right]$$

- dla „wyłączonego” potencjału rozpraszającego rozwinięcie funkcji $\psi_T \equiv \psi_e$ bo mamy do czynienia tylko z falą padającą
- „włączenie” potencjału zmienia tylko falę rozbiegającą się – lecz ponieważ proces jest elastyczny, to nie zmienia się liczba falowa natomiast zmieniają się tylko amplituda i faza
- dla „włączenia” tych zmian mnożymy wybiegającą falę kulistą przez czynnik η_l będący w ogólnym przypadku liczbą zespoloną

$$\psi_T = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta)$$

zachodzi jednak

$$\psi_T = \psi_e + \psi_a$$

gdzie

$$\psi_a = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$



$$\psi_a = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \psi_T - \psi_e = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} (1-\eta_l) e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} P_l(\cos \theta)$$

i bezpośrednio amplituda rozpraszania

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1-\eta_l) P_l(\cos \theta)$$

wykorzystując, że

$$i^l = \exp(i\pi l / 2)$$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = f^*(\theta)f(\theta) = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-\eta_l)P_l(\cos\theta) \right|^2$$

Problem rozwiązany, ale jak znaleźć η_l ? – to później

Ile wynosi

całkowity przekrój czynny na rozpraszanie elastyczne?

$$\sigma_s = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

korzystamy z własności wielomianów Legendre'a

$$\int_{4\pi} P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{ll'}$$

otrzymamy

$$\sigma_s = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \left(\frac{\pi}{k^2}\right) \sum_l (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

czyli całkowity przekrój czynny na rozproszenie rozkładamy na sumę przekrojów

$$\sigma_{s,l} = \pi\Delta^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

porównując

$$\sigma_{s,l} = \pi \Delta^2 (2l + 1) |1 - \eta_l|^2$$

z

$$\sigma_l = \pi (l + 1)^2 \Delta^2 - \pi l^2 \Delta^2 = (2l + 1) \pi \Delta^2$$

otrzymujemy, że ściśle traktowanie problemu zmieniło przybliżony wynik o czynnik $|1 - \eta_l|^2$

Czy w oparciu o wyniki otrzymane dla rozpraszania elastycznego można wyliczyć przekrój czynny zachodzenia reakcji jądrowych?

reakcja - każdy proces inny niż rozpraszanie elastyczne

dla rozpraszania elastycznego

$$\int j_t d\Omega = 0$$

gdyż przez dowolną powierzchnię kulistą wokół centrum rozpraszającego wbiega i wybiega tyle samo cząstek

w przypadku obecności reakcji jądrowych tak nie jest:
istnieje pewien nie znikający strumień wypadkowy
cząstek padających.

W przypadku rozpraszania elastycznego przekrój czynny na rozpraszanie definiowało się jako:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_a r^2}{j_e}$$

- dla obliczenia przekroju czynnego reakcji weźmy całkowity strumień j_T związany z ψ_T

$$\sigma_r = \frac{1}{j_e} \int j_T r^2 d\Omega$$

• j_T liczymy z

$$j = \frac{\eta}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*]$$

oraz z

$$\psi_T = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta)$$

a całkowanie uwzględnia związek

$$\int_{4\pi} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}$$

i otrzymujemy

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

analogicznie do przekroju na rozpraszanie również przekrój czynny reakcji daje się przedstawić w postaci sumy przekrojów

$$\sigma_{r,l} = \pi\Delta^2 (2l + 1) (1 - |\eta_l|^2)$$



że przekrój czynny reakcji $\sigma_{r,l} = 0$ jeśli $|\eta_l| = 1$



wniosek

dla $|\eta_l| = 1$ w wybiegającej fali nie ma żadnych zmian amplitudy, a zmianie ulega tylko faza

↓ dla $\eta_l=0$

$$\sigma_{r,l}^{\max} = \sigma_{s,l} = \pi\Delta^2(2l+1)$$

- reakcji towarzyszy więc również fala rozproszona i największą wartość przekroju czynnego na rozpraszanie otrzymamy dla $\eta_l=-1$

$$\sigma_{s,l}^{\max} = 4\pi\Delta^2(2l+1)$$

$$\sigma_{s,l}^{\max} = 4\sigma_{r,l}^{\max}$$

gdyż podczas rozpraszania elastycznego fale padające i rozproszone mogą interferować – i przy interferencji wzmacniającej amplituda ulega podwojeniu pociągając za sobą czterokrotny wzrost przekroju czynnego

W przypadku czystego rozpraszania elastycznego stosowany jest inny opis

- przyjmując $\eta_l = e^{2i\delta_l}$ wprowadza się rzeczywisty kąt δ zwany „przesunięciem fazowym”

- korzystając z przekształcenia $e^{i\delta} \sin \delta = \frac{1}{2}(1 - e^{2i\delta})$

- i z $f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \eta_l) P_l(\cos \theta)$

- otrzymamy

$$f(\theta) = \left(\frac{i}{2k} \right) \sum_l (2l+1)(1 - e^{2i\delta_l}) P_l(\cos \theta) = \Delta \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

- korzystając z
$$\int_{4\pi} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}$$

- dostajemy
$$\sigma_s = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = 4\pi\Delta^2 \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Przypadek rozpraszania cząstek o $l=0$ (rozpraszanie w fali s)

• tu ponieważ $P_0(\cos \theta) = 1$

• to z $f(\theta) = \left(\frac{i}{2k}\right) \sum_l (2l+1)(1 - e^{2i\delta_l}) P_l(\cos \theta) = \Delta \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$

• wynika, że $f_0 = \Delta e^{i\delta_0} \sin \delta_0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_0|^2 = \Delta^2 \sin^2 \delta_0$$

przekrój jest izotropowy

- całkowity przekrój czynny

$$\sigma_0 = 4\pi\Delta^2 \sin^2 \delta_0 = 4\pi|f_0|^2$$

tzn, że centrum rozpraszające działa jak kula o promieniu f_0

- wartość graniczną wielkości $-f_0$ dla bardzo dużych długości fali padających cząstek nazywamy „długością rozpraszania a ”

$$\lim_{k \rightarrow 0} (-f_0) = a$$



że przekrój czynny na rozpraszanie w fali s zależy tylko od przesunięcia fazowego δ_0

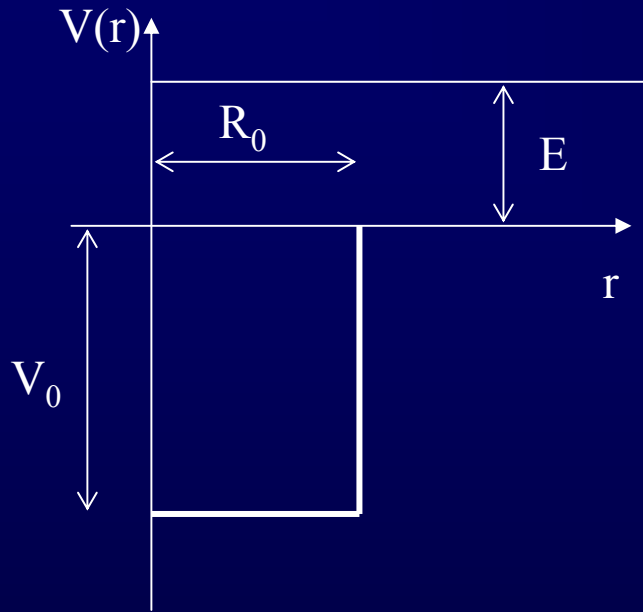
fizycznie taki przypadek jest realizowany, gdy λ jest duże w porównaniu do średnicy obszaru działania potencjału rozpraszającego

Długość fali neutronu (fm) dla różnych energii

E	1eV	1keV	1MeV	100MeV
λ	4500	140	4.5	0.45

więc dla jądra o średnicy $\sim 6\text{fm}$ rozpraszanie termicznych i powolnych neutronów mamy do czynienia z falą s

Przykład rozpraszania dla zadanego potencjału rozpraszającego



Problem rozpraszania rozwiążemy w dowolnym przypadku, dla którego jesteśmy w stanie podać wartości δ_l .

Jak to zrobić?

Rozważmy rozpraszanie w fali s na przyciągającym, sferycznie symetrycznym potencjale prostokątnym

- dla fal s istnieje tylko jedna wartość przesunięcia fazy δ_0 (szukamy więc związku między δ_0 i parametrami potencjału prostokątnego)
- poszukujemy rozwiązań równania Schrödingera dla $r < R_0$ i $r > R_0$ spełniające warunek ciągłości dla $r = R_0$
- ponieważ potencjał zależy tylko od r to rozwiązania równania dają się rozseparować, a ponieważ przyjmujemy rozpraszanie w fali s to $l=0$ i $\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \equiv 1$
- przy podstawieniu

$$u(r) = rR(r) = r\psi$$

i dla $l=0$ równanie Schrödingera przyjmuje postać

$$u'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)]u = u'' + k^2 u = 0$$

gdzie

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V] \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m[E - V]}$$

- dla stałego V równanie ma rozwiązanie

$$u = \alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr}$$

- w obszarze wewnętrznym $r < R_0$ (oznaczany indeksem i $V(r) = -V_0$ mamy

$$k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m[E + V_0]}$$

- i rozwiązanie w postaci

$$u_i = \alpha(\cos k_i r + i \sin k_i r) + \beta(\cos k_i r - i \sin k_i r)$$

- jako warunek brzegowy przyjmijmy by dla $r=0$ rozwiązanie $u_i=0$ (w przeciwnym razie $\psi = u/r$ będzie rozbieżne)
- podstawienie $r=0$ daje $\alpha + \beta = 0$, czyli $\beta = -\alpha$ i rozwiązanie przyjmuje postać

$$u_i = A \sin k_i r, \quad |2\alpha i = A|$$

- w obszarze zewnętrznym $r > R_0$ (indeks a) otrzymujemy

$$u_T = r\psi_T = \frac{i}{2k_a} \left[e^{-ik_a r} - e^{2i\delta_0} e^{ik_a r} \right] = \frac{1}{k_a} e^{i\delta_0} \sin(k_a r + \delta_0) = \frac{e^{i\delta_0}}{k_a} \sin k_a \left(r + \frac{\delta_0}{k_a} \right)$$

gdzie

$$k_a = \frac{1}{\eta} \sqrt{2mE}$$

- dla $r=R_0$ z warunków ciągłości funkcji i ich pochodnych wynikają równania

$$\left(\frac{1}{k_a} \right) e^{i\delta_0} \sin(k_a R_0 + \delta_0) = A \sin k_i R_0$$

$$e^{i\delta_0} \cos(k_a R_0 + \delta_0) = A k_i \cos k_i R_0$$

- dzieląc stronami dostajemy

$$\left(\frac{1}{k_a}\right) \operatorname{tg}(k_a R_0 + \delta_0) = \left(\frac{1}{k_i}\right) \operatorname{tg}(k_i R_0)$$

- otrzymamy szukaną wartość

$$\delta_0 = -k_a R_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{k_a}{k_i} \operatorname{tg} k_i R_0\right)$$

- tu δ_0 jest jednoznacznie określone przez R_0 ,
energii cząstek E (za pośrednictwem k_a)
i przez V_0 (za pośrednictwem k_i)

- wyznaczenie δ_0 przez takie parametry jak R_0 , energia cząstek E (za pośrednictwem k_a) i V_0 (za pośrednictwem k_j) pozwala wyznaczyć przekrój czynny na rozpraszanie

Pytanie zasadnicze –

czy takie samo δ_0 otrzymamy dla różnych kombinacji R_0 i V_0

Odpowiedź –

tak

Pytanie zasadnicze –

jakie informacje uzyskujemy w rzeczywistości z pomiarów rozpraszania

- ograniczymy się ponownie do neutronowych fal s
- do zbadania wpływu potencjału na funkcje falowe
 - rozważmy funkcję $u(r)$ będącą poprawnym rozwiązaniem równania Schrödingera wewnątrz potencjału prostokątnego

$$u_i \propto \sin k_i r$$

- i na zewnątrz

$$u_a \propto \sin(k_a r + \delta_0)$$

- oraz funkcję $v(r)$, która dla $r > R_0$ jest identyczna z $u(r)$ natomiast w obszarze potencjału nie zależy od niego i $v(0)=1$, czyli

$$v(r) \equiv \frac{\sin(k_a r + \delta_0)}{\sin \delta_0}$$

- ograniczymy się do krótkozasięgowego potencjału rozpraszania o brzegu w R_0

- jeśli rozważymy przypadek graniczny $E \rightarrow 0$ to:

- $k_a = \frac{1}{\eta} \sqrt{2mE} \rightarrow 0$

- równanie Schrodingera $u'' + k^2 u = 0$ redukuje się do $u'' = 0$

- tzn. u_0 ma na zewnątrz potencjału postać $u_0 = c(r - a)$

- wynik jest identyczny z graniczną postacią dla fal nieskończenie długich $u_a \propto \sin(k_a r + \delta_0)$

- zgodnie z definicją v_0 jest zarówno w obszarze wewnętrznym jak i zewnętrznym określona przez

$$u_0 = c(r - a)$$

przy czym stała c winna być dobrana tak by $v_0(0)=1$, tzn.

$$c = -\frac{1}{a}$$

lub

$$v_0 = 1 - \frac{r}{a}$$

- z drugiej strony

$$\frac{\sin(k_a r + \delta_0)}{\sin \delta_0} \xrightarrow{k_a \rightarrow 0} 1 + k_a r \operatorname{ctg} \delta_0$$

$$k_a \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a}$$

- więc amplitudę rozpraszania f_0 można zapisać jako

$$f_0 = \frac{1}{k_a} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 = \frac{1}{k_a \operatorname{ctg} \delta_0 - ik_a}$$

- przechodząc z k_a do zera i porównując z

$$k_a \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a}$$

- dostajemy

$$\lim_{k_a \rightarrow 0} f_0 = -a$$

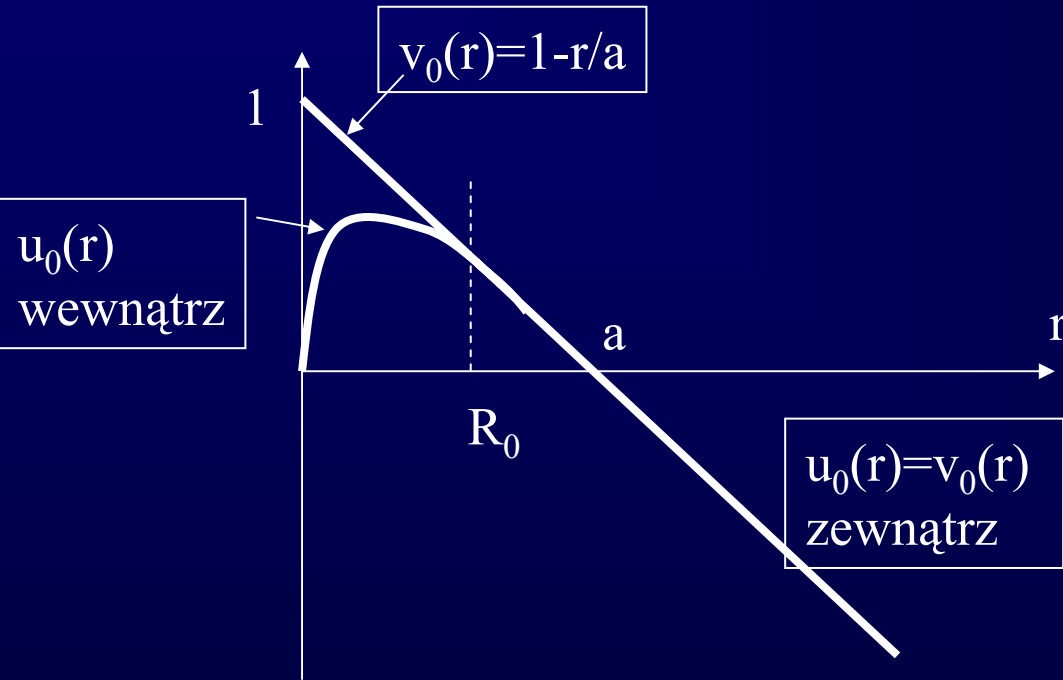
- wynika stąd, że całkowity przekrój czynny

$$\sigma_0 = 4\pi a^2$$

czyli w granicznym przypadku bardzo małych energii cząstek padających proces przebiega tak jakby rozpraszane były wszystkie cząstki padające na kulę o promieniu a .

Wielkość a nazywamy *długością rozpraszania*.

- każdy potencjał dający taką samą długość rozpraszania, daje taki sam przekrój czynny dla $E \rightarrow 0$.



Długość rozpraszania a .

Przybliżenie Borna

metoda obliczania przekrojów czynnych dla cząstek o dużych energiach

- tu w postaci fali płaskiej przedstawia się cząstki padające i rozproszone
- wektor fali padającej oznaczmy przez \mathbf{k} a fali rozproszonej przez \mathbf{k}'
- podczas elastycznego rozproszenia ulega zmianie tylko kierunek wektora \mathbf{k}
- cząstki opisują więc funkcje

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{i(kr)}$$

(padające)

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{i(k'r)}$$

(rozproszone)

unormowane tak, by

$$\int |\psi|^2 d\tau = 1$$

- prawdopodobieństwo przejścia ze stanu początkowego do końcowego to

$$W(k, k') = \frac{2\pi}{\eta} |U(k, k')|^2 \frac{dn}{dE_0} \quad (s^{-1})$$

gdzie $U(k, k')$ to element macierzowy dla danego przejścia
 dn/dE_0 to liczba możliwych stanów końcowych na przedział energii

- by wykorzystać powyższy związek musimy założyć, że potencjał rozpraszający można traktować jako ‘zaburzenie’, tzn. że $E \gg V_0$.

- oznaczmy przez $W_\theta(k, k')$ prawdopodobieństwo rozproszenia w kąt $d\Omega$ w kierunku kąta θ . Wówczas

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = W_\theta(k, k') / j \quad (cm^2)$$

- dla fal płaskich typu

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{i(kr)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{i(k'r)}$$

- i potencjału $V(r)$ macierzowy element przejścia to

$$U_{k, k'} = \frac{1}{\tau} \int (e^{ik'r})^* V(r) e^{ik \cdot r} d\tau = \frac{1}{\tau} \int V(r) e^{i(k-k') \cdot r} d\tau$$

- na podstawie rozważań z modelu jądra jako gazu Fermiego mamy gęstość stanów jako

$$\left(\frac{dn}{dE_0}\right)_\theta = \frac{\tau p^2}{(2\pi\eta)^3 v} \quad (MeV^{-1})$$

- po połączeniu równań i wstawieniu $j=v/\tau$ otrzymamy

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{\tau^2}{4\pi^2\eta^4} \frac{p^2}{v^2} |U(k, k')|^2 = \frac{m^2}{4\pi^3\eta^4} \left| \int V(r) e^{i(k-k')r} d\tau \right|^2 \quad (cm^2)$$

- powyższe wyrażenie można ponownie traktować jako kwadrat amplitudy rozpraszania $f(\theta)$.
- określając wielkości zmiany

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' = \eta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \vec{k} - \vec{k}' = \frac{\vec{q}}{\eta}$$

- otrzymujemy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

dla

$$f(\theta) = \frac{-m}{2\pi\eta^2} \int V(r) e^{(i/\eta)q \cdot r} d\tau \quad (cm)$$

- określenie zakresu stosowalności nie jest łatwe.

Przyjmijmy bez dowodu, że dla

$$R_0 k \left| \sqrt{1 \pm V_0 / E} - 1 \right| \ll 1$$

równanie

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{\tau^2}{4\pi^2 \eta^4} \frac{p^2}{v^2} |U(k, k')|^2 = \frac{m^2}{4\pi^3 \eta^4} \left| \int V(r) e^{i(k-k') \cdot r} d\tau \right|^2 \quad (cm^2)$$

stanowi wystarczająco dobre przybliżenie,

a R_0 oznacza zasięg potencjału

Wyliczenia dla potencjału centralnego

- niech oś z ma kierunek wektora \mathbf{q}
- kąt rozpraszania niech będzie zdefiniowany w układzie współrzędnych r, θ, φ , którego oś z ma kierunek \mathbf{k} . W tym układzie

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} &= qr \cos \theta' \\ d\tau &= r^2 \sin \theta' dr d\theta' d\varphi'\end{aligned}$$

- czyli

$$\int e^{(i/\eta)qr} d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{(i/\eta)qr \cos \theta'} r^2 \sin \theta' dr d\theta' d\varphi'$$

- podstawiając

$$z = (i/\eta)qr \cos \theta', \quad d\theta' = -dz / [(i/\eta)qr \sin \theta']$$

- mamy

$$-2\pi \int_0^{\infty} \int_{(i/\eta)qr}^{-i/\eta qr} \frac{e^z r}{(i/\eta)q} dz dr = -2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-(i/\eta)qr} - e^{(i/\eta)qr}}{(i/\eta)q} r dr$$

- to znaczy, że

$$\int e^{(i/\eta)qr} d\tau = \frac{4\pi\eta}{q} \int_0^{\infty} r \sin(qr/\eta) dr = \int_0^{\infty} \frac{\sin(qr/\eta)}{qr/\eta} 4\pi r^2 dr$$

- po wykonaniu całkowania względem współrzędnych kątowych otrzymamy amplitudę rozpraszania

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\eta q} \int_0^{\infty} V(r) r \sin(qr/\eta) dr = -\frac{m}{2\pi\eta^2 q} \int_0^{\infty} V(r) \frac{\sin(qr/\eta)}{qr/\eta} 4\pi r^2 dr$$

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\eta q} \int_0^{\infty} V(r) r \sin(qr / \eta) dr = -\frac{m}{2\pi\eta^2 q} \int_0^{\infty} V(r) \frac{\sin(qr / \eta)}{qr / \eta} 4\pi r^2 dr$$

Wykorzystanie w trzech prostych przypadkach

1) rozpraszanie Rutherforda $V(r) = ZZ' e^2 / r$



$$f(\theta) = -\frac{2mZZ' e^2}{\eta q} \int_0^{\infty} \sin(qr / \eta) dr = -\frac{2mZZ' e^2}{\eta q} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \sin(qr / \eta) e^{-r/a} dr = \frac{2mZZ' e^2}{q^2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} = |f(\theta)|^2 = \left(2mZZ' e^2 \right)^2 \frac{1}{q^4}$$

2) rozpraszanie elektronów na jądrze

- elektrony są rozpraszane na kuli o rozkładzie ładunku $\rho(r)$
- niech t oznacza wektor położenia elektronu w układzie CM
- niech s będzie wektorem między elektronem i dowolnym elementem objętości d^3r naładowanej kuli
- element objętości d^3r ma ładunek $Ze\rho(r)d^3r$ i wnosi on przyczynek do potencjału, w którym znajduje się elektron

$$dV(t) = \frac{Ze^2}{s} \rho(r) d^3r$$

- i potencjał jest równy

$$V(t) = \int \frac{Ze^2}{s} \rho(r) d^3r$$

- ponieważ $\mathbf{t}=\mathbf{r}+\mathbf{s}$

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \frac{-mZe^2}{2\pi\eta^2} \iint \frac{\rho(r)}{s} e^{(i/\eta)q(r+s)} d^3r d^3t = \\
 & \int \rho(r) e^{(i/\eta)q \cdot r} d^3r \frac{-mZe^2}{2\pi\eta^2} \int \frac{1}{s} e^{(i/\eta)q \cdot s} d^3s = \\
 & \underbrace{\int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\eta)}{(qr/\eta)} 4\pi r^2 dr}_{F^2(q)} \cdot \underbrace{\frac{-2mZe^2}{\eta q} \int_0^\infty \sin(qs/\eta) ds}_{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = F^2(q) \times \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}}$$

$F(q)$ – czynnik kształtujący

3) Rozpraszanie na potencjale prostokątnym

- tu $V(r)=-V_0$ wewnątrz i $V(r)=0$ poza

$$f(\theta) = \frac{2mV_0}{\eta q} \int_0^{R_0} r \sin(qr / \eta) dr$$

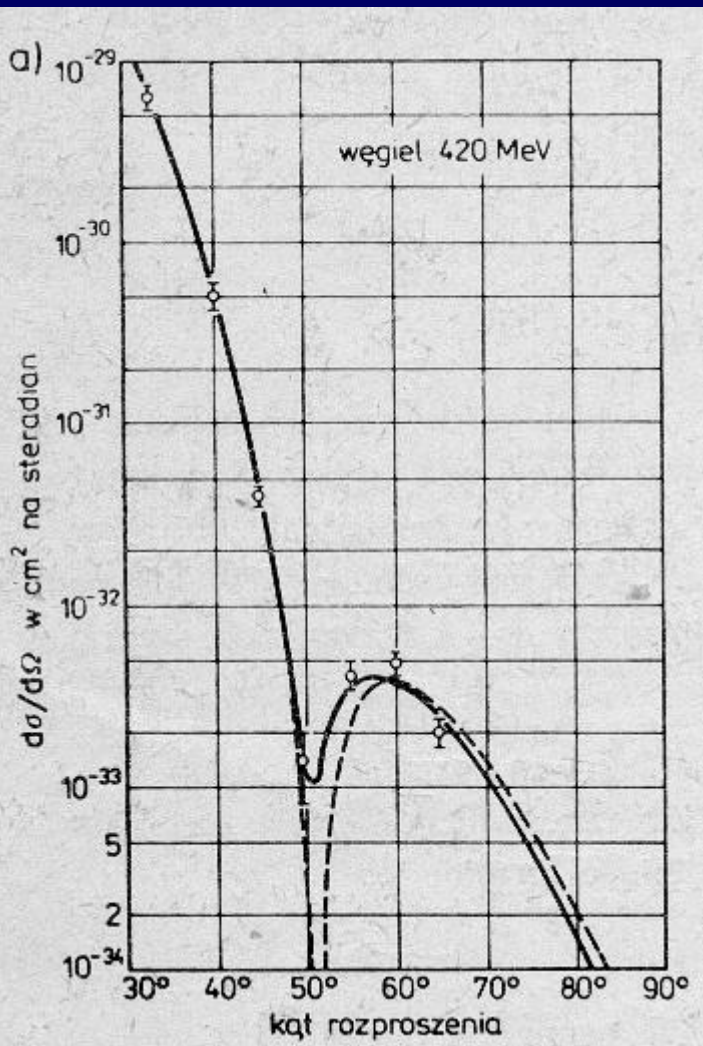
- i otrzymamy

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = |f(\theta)|^2 = \frac{4m^2V_0^2\eta^2}{q^2} [\sin(qR_0 / \eta) - (qR_0 / \eta)\cos(qR_0 / \eta)]^2$$

- prawa strona jest funkcją tylko θ

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{4m^2V_0^2R_0^6}{\eta^4} \frac{\left[\sin\left(2kR_0 \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right) - 2kR_0 \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos\left(2kR_0 \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right) \right]^2}{\left(2kR_0 \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)^6}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{4m^2V_0^2R_0^6}{\eta^4} \frac{\left[\sin\left(2kR_0\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right) - 2kR_0\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos\left(2kR_0\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)\right]^2}{\left(2kR_0\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)^6}$$



Rozkłady kątowe dla elastycznego rozpraszania elektronów na jądrach C.

Formalizm opisu rozpraszania elastycznego niezbędny by:

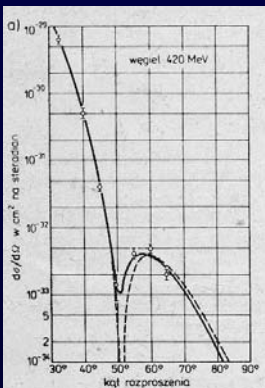
- uzyskać podstawy do wnioskowania o siłach jądrowych na podstawie danych odnoszących się do rozpraszania nukleon-nukleon
- by opisać rozpraszanie nukleonów lub cięższych pocisków na ciężkich jądrach
- te procesy rozpraszania niosą informacje o średnim potencjale jąder, którego znajomość odgrywa ważną rolę przy opisie reakcji jądrowych

- dotychczas rozważaliśmy dwa przypadki rozpraszania neutronów o różnych energiach:
- przy małych energiach, przy których długość fali neutronu jest znacznie większa od średnicy jądra, tzn. $\lambda \gg R$, rozpraszanie jest izotropowe ponieważ cała powierzchnia jądra jest źródłem fal kulistych o takich samych fazach

$$f_0 = \Delta e^{i\delta_0} \sin \delta_0$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_0|^2 = \Delta^2 \sin^2 \delta_0$$

- w przypadku dużych energii dla których $\lambda \ll R$ uzyskujemy rozkład kątowy z wyraźnymi strukturami dyfrakcyjnymi



- w obu przypadkach nie trzeba było uwzględniać efektów kulombowskich

Rozpraszanie elastyczne ciężkich pocisków

- w tym przypadku długość fali de Broglie'a jest bardzo mała i nietrudne jest spełnienie warunku, by była ona znacznie mniejsza od średnicy potencjału rozpraszającego
- w przypadku ciężkich pocisków bariera kulombowska jest zazwyczaj wysoka
- podczas zderzeń możemy oczekiwać długości fal odpowiadających energii pozwalającej pociskowi na wzniesienie się na poziom bariery - mamy wówczas

$$E = E_{CM} - V_C$$

- małe długości fal oznaczają jednocześnie duże wartości momentu pędu

- cząstka padająca na brzeg jądra ma orbitalny moment pędu

$$|l^0| = p \cdot R = \eta k R = \eta(R / \Delta)$$

- odległość jąder jest tym razem sumą ich promieni $R=R_1+R_2$
- cząstka w tym przypadku przedstawiona jest poprzez dobrze zdefiniowany pakiet falowy
- w oparciu o odpowiednie rozważania zależne od czasu można pokazać, że musi być spełniony warunek

$$|\text{grad} \lambda(r^0)|^2 \ll 1$$

co znaczy, że potencjał zmienia się niewiele na odległości rzędu długości fali

$$|\text{grad}\lambda(r^0)|^2 \ll 1$$

- dla rozpraszania kulombowskiego powyższy warunek jest spełniony wówczas, gdy $\lambda/2\pi$ jest mniejsze od minimalnej odległości r_{\min} na jaką mogą zbliżyć się partnerzy rozpraszania przy rozpraszaniu na ładunkach punktowych

$$2\Delta \ll r_{\min}$$

- dla cząstki o energii E_0 poruszającej się w polu kulombowskim zachodzi

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = T(r) + V(r) = \frac{1}{2}mv^2(r) + \frac{Z_1Z_2e^2}{r}$$

- ponadto $v_0 = v(\infty)$

- przy zderzeniu centralnym, w minimalnej odległości pocisk ma energię kinetyczną $T(r_{\min})=0$ i wynika stąd

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{Z_1Z_2e^2}{r_{\min}^{cent}}, \quad r_{\min}^{cent} = \frac{Z_1Z_2e^2}{mv_0^2}$$

- i warunek

$$2\Delta \ll r_{\min}$$

- przy uwzględnieniu

$$1/\Delta = (1/\eta)mv_0$$

- przybiera postać (dla zderzenia centralnego)

$$\frac{\frac{1}{2}r_{\min}}{\Delta} = \frac{Z_1Z_2e^2}{\eta v_0} \equiv n \gg 1$$

- wprowadzono tu parametr Sommerfelda n , który odgrywa bardzo ważną rolę w rozważaniach dotyczących zderzeń w polu kulombowskim

$$n = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\eta v_0} = \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{v/c} = 0.16 Z_1 Z_2 \sqrt{\frac{m_r}{E_{CM}}}$$

gdzie α jest stałą struktury subtelnej, m_r masą zredukowaną i E_{CM} energią w układzie CM

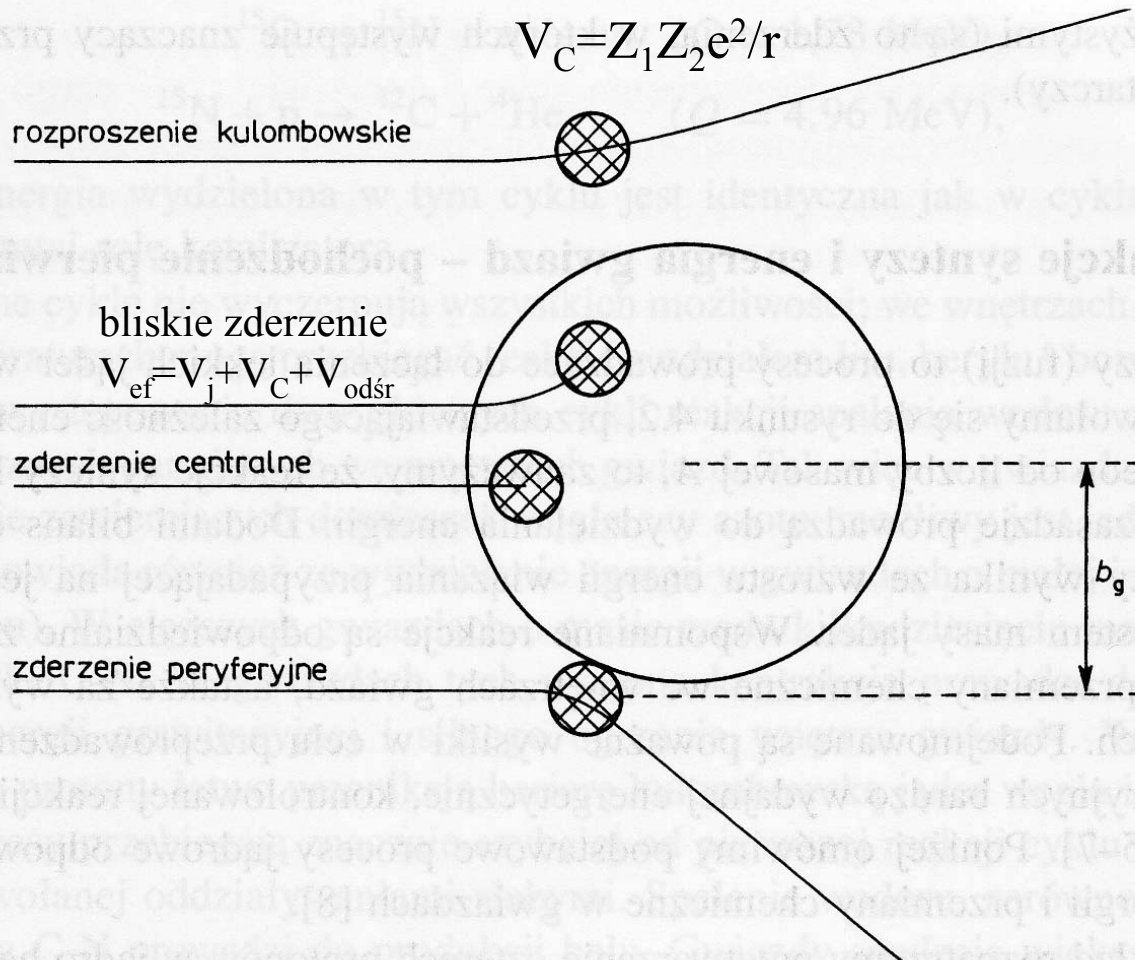
- parametr n jest miarą stosunku wielkości oddziaływania kulombowskiego i energii pocisków

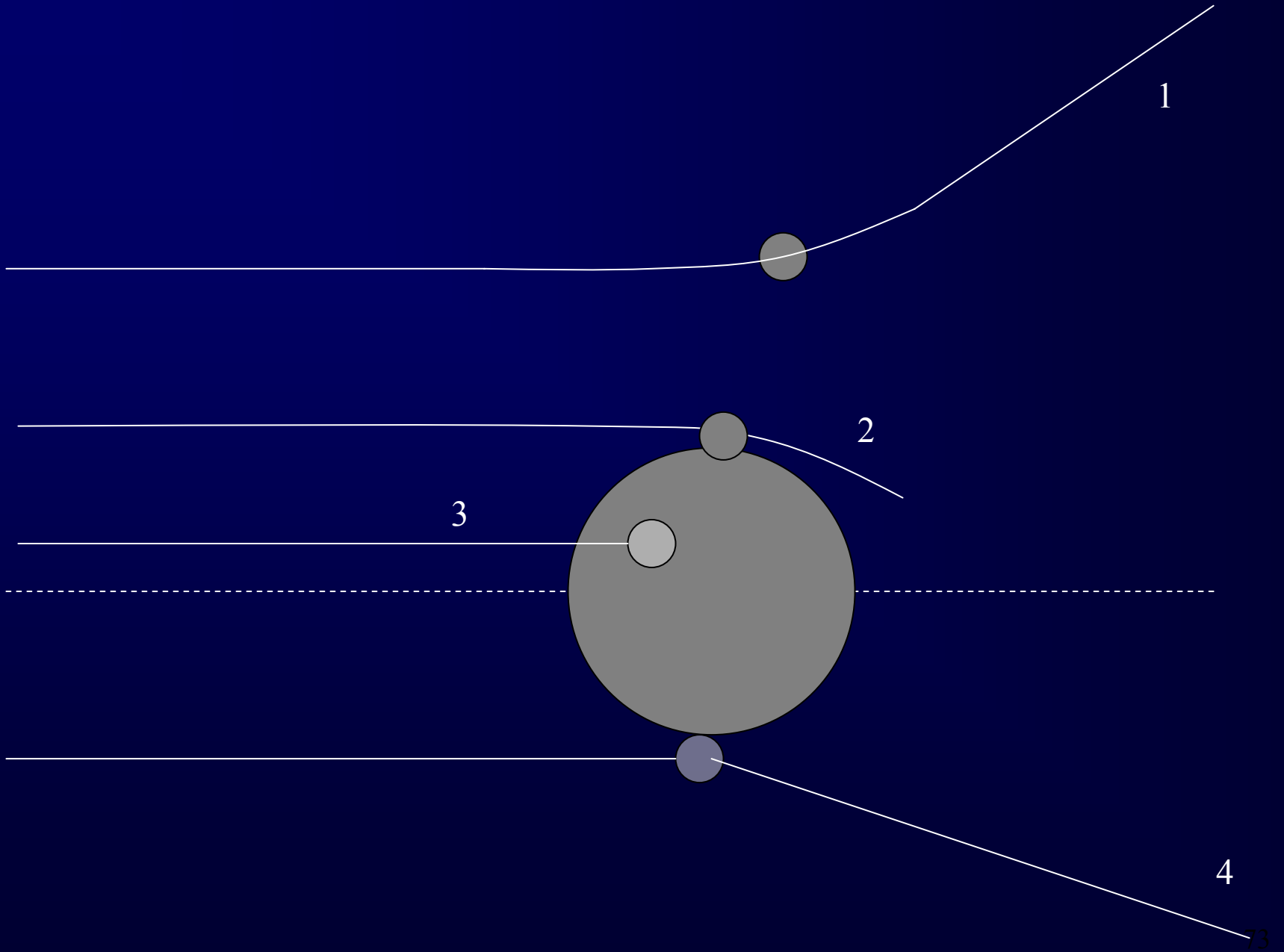
- parametr n jest miarą stosunku wielkości oddziaływania kulombowskiego i energii pocisków

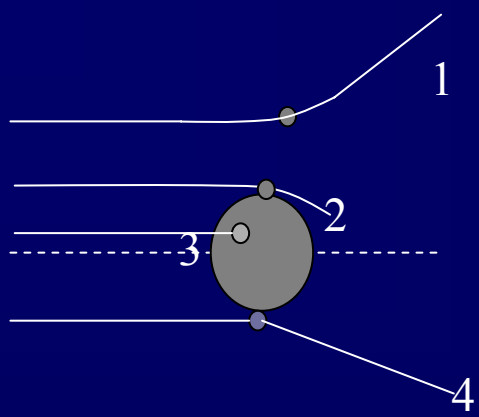
$$n = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\eta v_0} = \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{v/c} = 0.16 Z_1 Z_2 \sqrt{\frac{m_r}{E_{CM}}}$$

- duża wartość n odpowiada dobrze zdefiniowanym pakietom poruszającym się po torach kulombowskich, co oznacza że przybliżenie klasycznej trajektorii jest lepsze od przybliżenia fali płaskiej
- mała wartość n oznacza niewielki wpływ sił kulombowskich na ruch cząstki i większą dokładność opisu falowego.

- zależnie od wielkości parametru zderzenia oraz energii kinetycznej cząstki mogą albo mijać jądro po torach kulombowskich, albo w nie uderzać



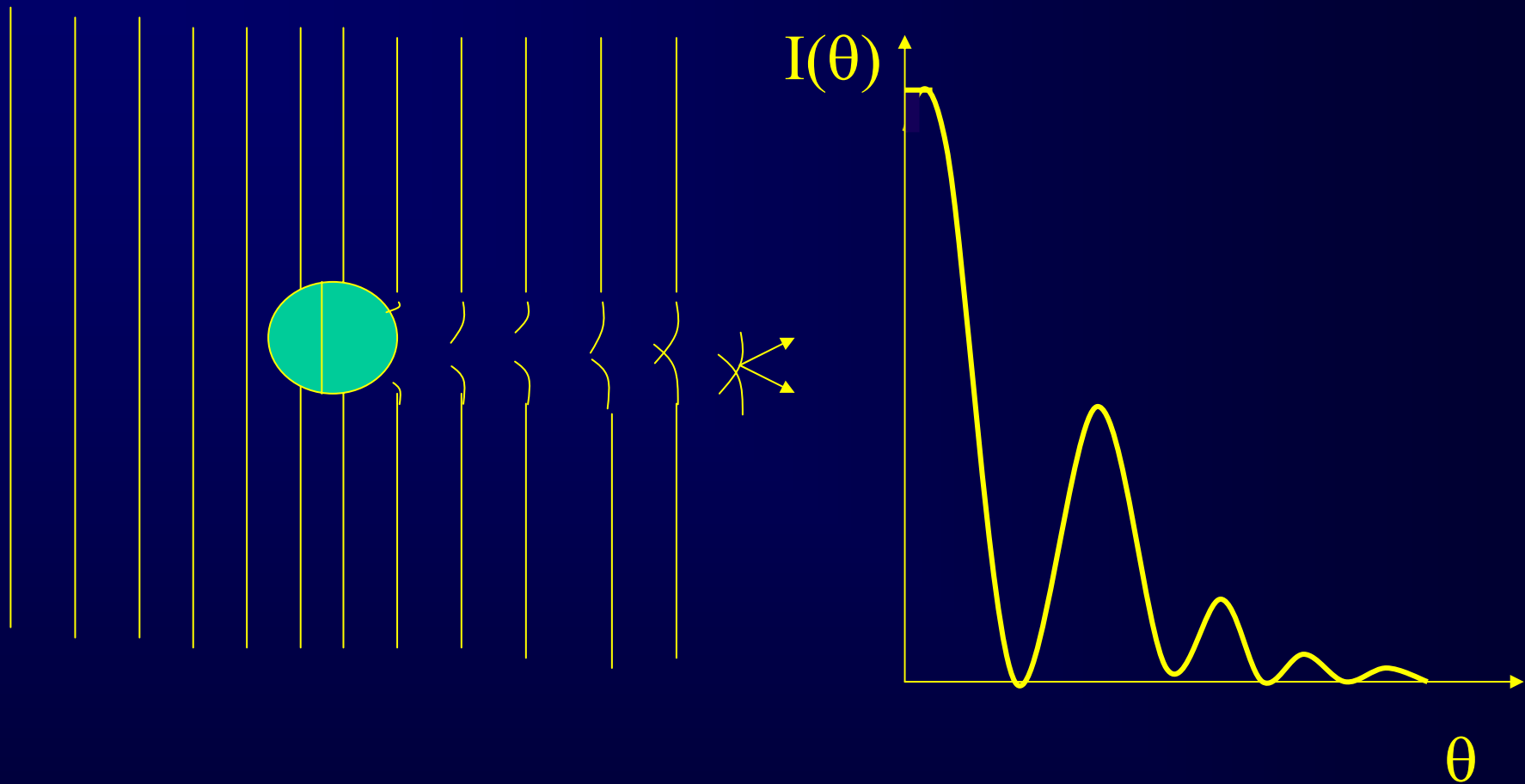




- tor 1 – odpowiada parametrowi zderzenia, przy którym działa tylko potencjał kulombowski
- tor 2 – w tym przypadku wchodzi również przyciągające siły jądrowe. Cząstka porusza się w pewnym potencjale efektywnym i zakreśla w nim tor o dość skomplikowanym kształcie. W krańcowym przypadku tor pocisku może nawet okrążyć jądro tarczy powodując rozproszenie w tył efekt aureoli-glorii

- tor 3 – odpowiada procesom reakcji
- tor 4 – zwany torem kontaktowym – jego parametr zderzenia oznacza się zwykle jako parametr graniczny b_g – parametr ten wyznacza granicę między przypadkami 1 i 2

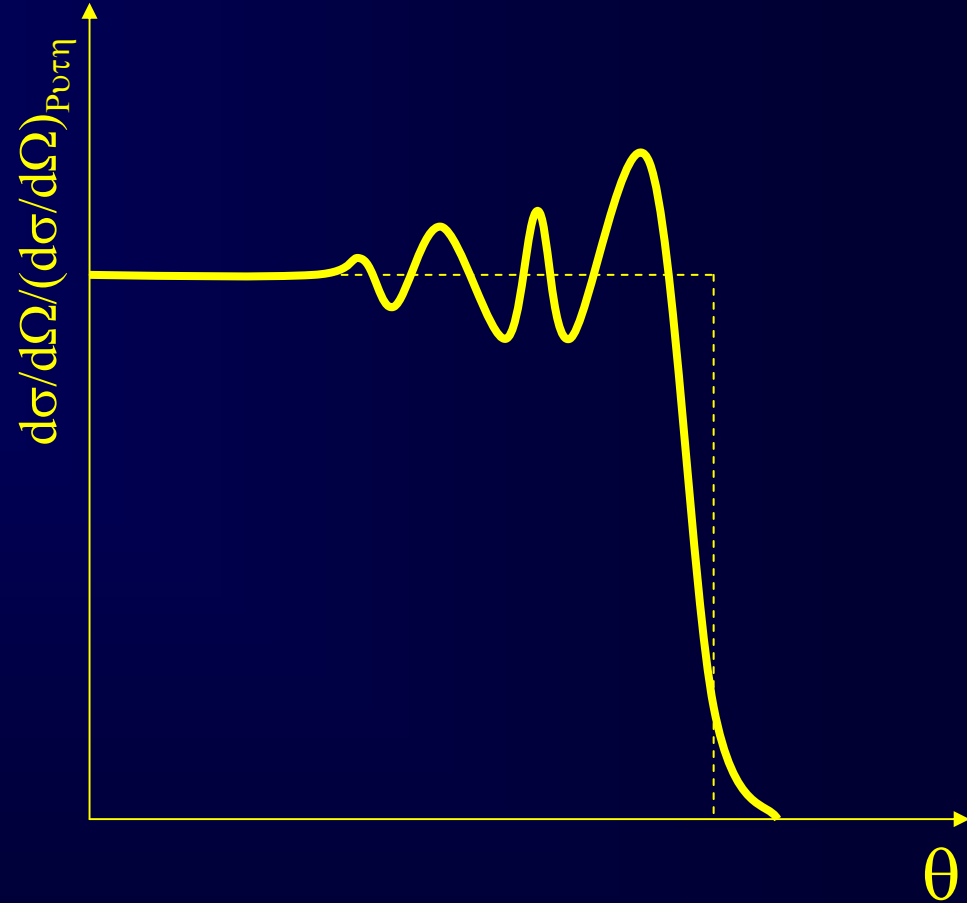
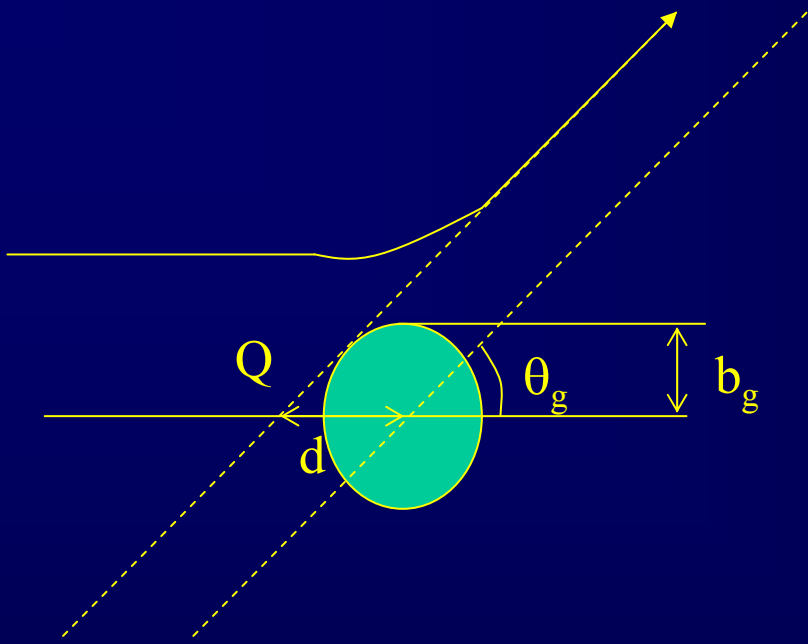
- dla $\lambda \ll R$ cząstki z $b \ll b_g$ ulegają absorpcji w jądrze
- w obrazie falowym oznacza to, że z padającej fali płaskiej zostaje wycięty kolisty kawałek
- w optyce klasycznej takie zjawisko znane jest jako *ugięcie Fraunhofera*
- w takim przypadku źródło światła i ekran znajdują się w nieskończoności
- efektów takich możemy oczekiwać, gdy wpływ potencjału kulombowskiego na tory cząstek jest mały, tzn. gdy $n \ll 1$ i $E \gg V_C$



Ugięcie Fraunhofera przy rozpraszaniu ciężkich jonów.

- gdy $n > 1$, często spełnionym w przypadku ciężkich jonów, wiązka cząstek w polu kulombowskim jest silnie rozbieżna
- w optyce klasycznej odpowiada temu przypadek powstającej rozbieżnej wiązki światła wskutek ugięcia na przeszkodzie o promieniu a , czyli odpowiada przypadek tzw. ugięcia Fresnela – odnosi się on do przypadku, w którym odległości źródła i ekranu od ciała rozpraszającego są skończone
- oznaczając przez d większą z tych odległości dostajemy warunek na ugięcie Fresnela:

$$\frac{a}{\Delta} \frac{a}{d} \ll 1$$



Ugięcie Fresnela przy rozpraszaniu ciężkich jonów

- cząstki przesłonięte przez brzeg jądra wydają się pochodzić z wirtualnego źródła Q leżącego w odległości d od centrum rozpraszania

$$d = \frac{b_g}{\sin \theta_g}$$

- ponieważ jako promień ciała rozpraszającego należy przyjąć $a=b_g$ to

$$\Delta_g = \frac{1}{k} = \frac{\eta}{p_g} = \frac{b_g}{l_g}$$

- i warunek dla ugięcia Fresnela przybiera postać

$$\frac{b_g}{b_g / l_g} \frac{b_g}{b_g / \sin \theta_g} = l_g \sin \theta_g \ll 1$$

a dla ugięcia Fraunhofera

$$l_g \sin \theta_g \gg 1$$

- w praktyce graniczny kąt rozproszenia jest zazwyczaj mały, tak że $\theta_g \ll 1$ i $d \gg b_g$ i wówczas

$$n \approx \frac{1}{2} l_g \theta_g$$

- w ramach naszego przybliżenia mamy

$n \ll 1$ ugięcie Fraunhofera

$n \sim 1$ ugięcie Fresnela

- oba rodzaje ugięcia można traktować jako przypadki graniczne wynikające z formalizmu fal cząstkowych
- założenie $\lambda \ll R$, skąd wynika $l_g \gg 1$, oraz przyjęcie silnej absorpcji dla $b < b_g$ i zaniedbywalnego przyczynku od potencjału jądra dla $b > b_g$ oznacza, że w rozkładzie na fale cząstkowe musimy przyjąć

$$\eta_l = 0 \text{ dla } l \leq l_g$$

$$\eta_l = 1 \text{ dla } l > l_g$$

- do rozkładu na fale cząstkowe wprowadza się więc graniczny moment pędu $l_a \approx l_g$.
- mówimy o modelu z ostrym obcięciem (sharp cut off model)
- suma występująca w rozkładzie na fale cząstkowe będzie skończona z uwagi na zanikanie wyrazów z $l > l_a$

- ponieważ $l_g \gg 1$ w granicy można sumę zastąpić całką
- uzyskane całki są równoważne całkom ugięcia w optyce i dla $n \ll 1$, tzn. przy zaniedbaniu kulombowskich zmian fazy prowadzą do ugięcia Fraunhofera jako przypadku granicznego
- dla $n \sim 1$ przy uwzględnieniu zmian fazy prowadzą do ugięcia Fresnela jako przypadku granicznego