



WSTĘP DO FIZYKI JADRA ATOMOWEGO

Wykład —4-6

Wiedza i Życie

IV ROK FIZYKI - semestr zimowy
Janusz Braziewicz - Zakład Fizyki Medycznej IF AŚ

Modele jądra atomowego

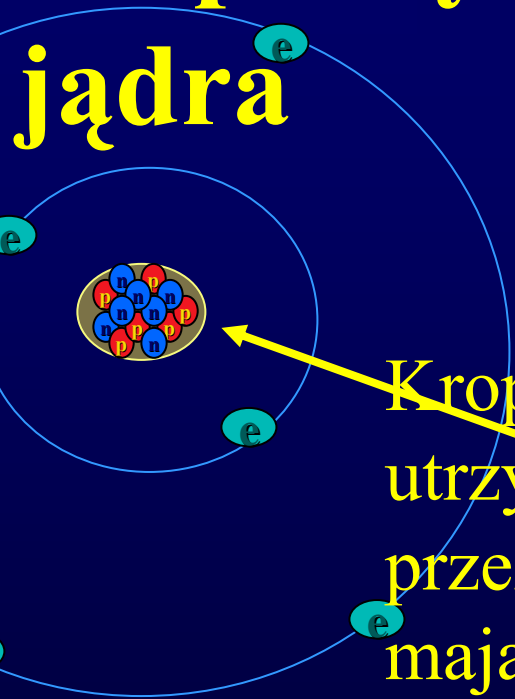
Oczekujemy wyjaśnienia:

- stałej gęstości materii jądrowej
- stałej energii wiązania
- własności jąder takich, jak spin, momenty elektromagnetyczne i ich związek z Z i N
- rozmieszczenia stabilnych izotopów na wykresie $n=f(Z)$
- występowania liczb magicznych
- prawidłowości występujących w stabilności izobarów względem rozpadu β
- systematyczności zmian energii rozpadu α ze zmianą Z i N
- rozszczepienia jąder

Modele jądrowe



Model kroplowy jądra



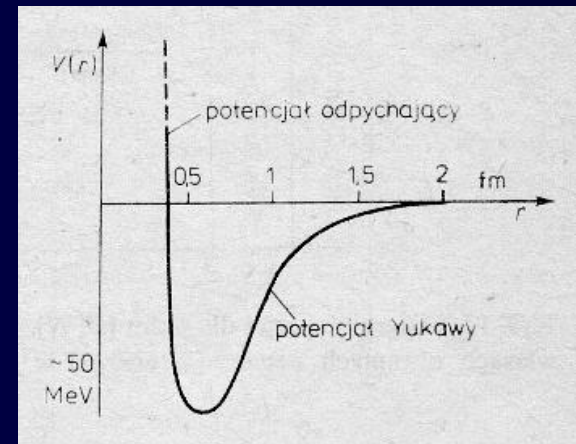
Kropla nieściśliwej cieczy
utrzymywana w równowadze
przez krótkozasięgowe siły
mające własność wysycania się.

analogia do kropli cieczy:

- stała gęstość materii
- stała energia wiązania na nukleon

wyjaśnia takie własności jądra:

- masa jądra
- energia wiązania



Energia wiązania kropli:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$$

$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$ - energia objętościowa

$$B_1 = a_v A$$

$$V_{\text{jadra}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \left| R = r_o A^{1/3} \right| = a_v A$$

$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$

$$B_2 = -a_s A^{2/3}$$

$$S_{\text{jadra}} = 4\pi R^2 = \left| R = r_o A^{1/3} \right| = a_s A^{2/3}$$

$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$ - energia kulombowska

$$B_3 = -a_c Z^2 A^{-1/3}$$

$$V_{\text{kulombowskie-jadra}} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{r} = \left| \frac{R = r_o A^{1/3}}{r} \right| = a_c Z^2 A^{-1/3}$$

$$B_5 = \begin{cases} +\delta \text{ parzyste } Z \text{ i } A \\ 0 \text{ nieparzyste } Z \text{ i } A \\ -\delta \text{ nieparzyste } Z \text{ i } A \end{cases}$$

$$V_{\text{asymetrii-jadra}} = a_A \frac{\left(Z - \frac{A}{2} \right)^2}{A}$$

półempiryczny wzór na energię wiązania:

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2}{A} \pm a_\delta A^{-1/2}$$

ponieważ

$$m(Z, A) = Zm_H + (A - Z)m_n - B / c^2$$

$$m(Z, A) = Zm_H + (A - Z)m_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c Z^2 A^{-1/3} + a_a \frac{\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2}{A} \pm a_\delta A^{-1/2}$$

formuła masowa Weizsäckera

Stałe

$$a_v = 17.011 m_u = 15.85 \text{ MeV}/c^2$$

$$a_c = 0.767 m_u = 0.71 \text{ MeV}/c^2$$

$$a_s = 19.691 m_u = 18.34 \text{ MeV}/c^2$$

$$a_a = 99.692 m_u = 92.86 \text{ MeV}/c^2$$

$$a_\delta = 12.3 m_u = 11.46 \text{ MeV}/c^2$$

Formuła opisuje

średnie zachowanie

dla $A > 30$ z dokładnością $\sim 1\%$.

Formuła łatwo tłumaczy

rozszczerpienie jądra.

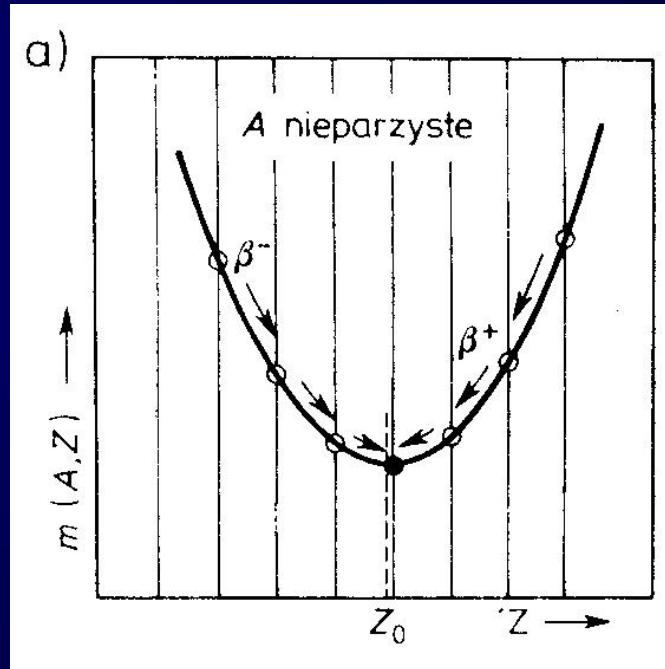
Model kropłowy traktuje jądro jako całość
nic nie mówiąc o poszczególnych
nukleonach.

Wyjaśnił tylko:

- **energię wiązania**
- **masę jądra.**

Zależność masy w ciągu izobarów

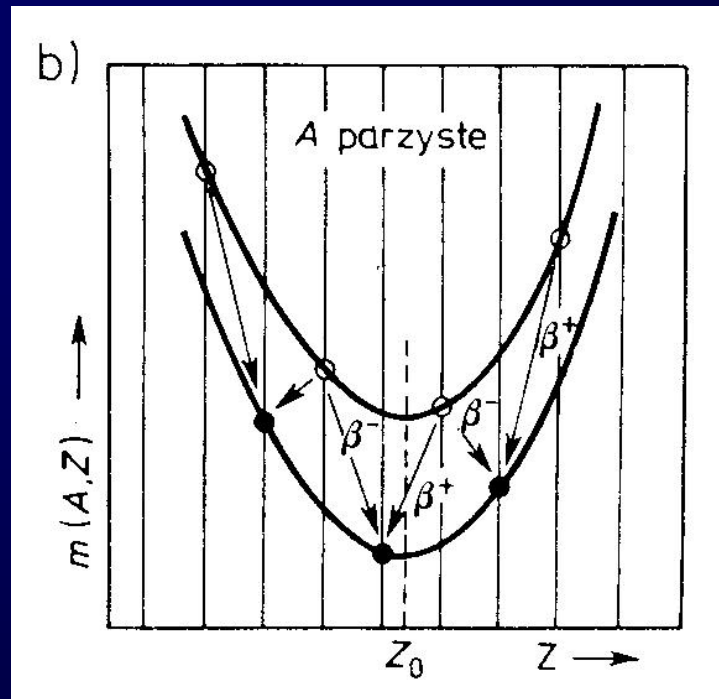
A-nieparzyste



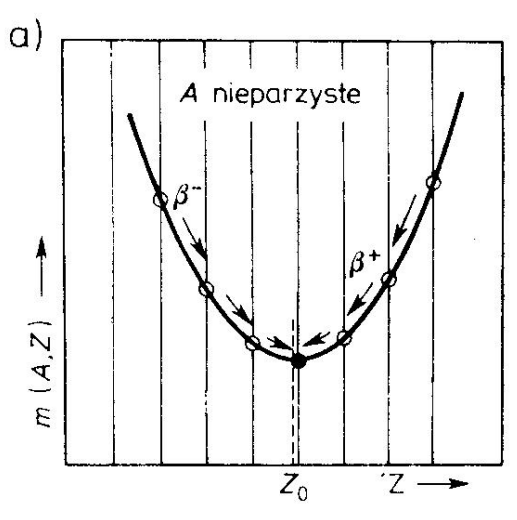
Istnieje tylko jeden izobar o minimalnej wartości masy – to izobar stabilny

Zależność masy w ciągu izobarów

A-parzyste

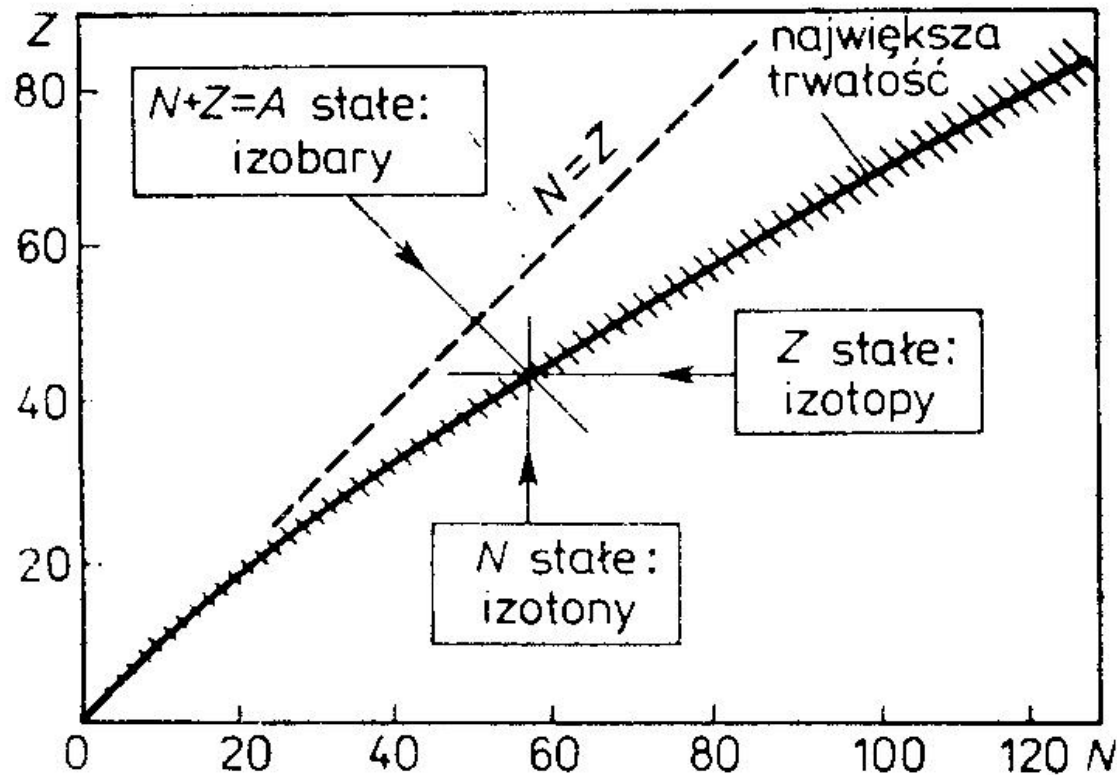
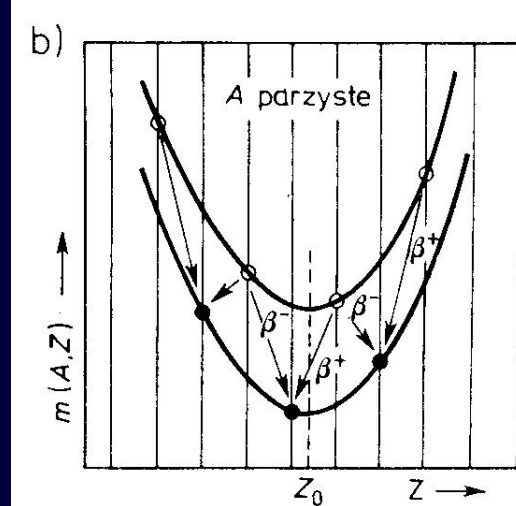


Istnieje więcej niż jeden izobar o minimalnej wartości masy – to izobary stabilne



**Szukanie minimum
dla dowolnego jądra
o liczbach Z i A**

to



$$m_p - m_n$$

$$Z_0 = \frac{A}{2}$$

$$A^{-1} = 0$$

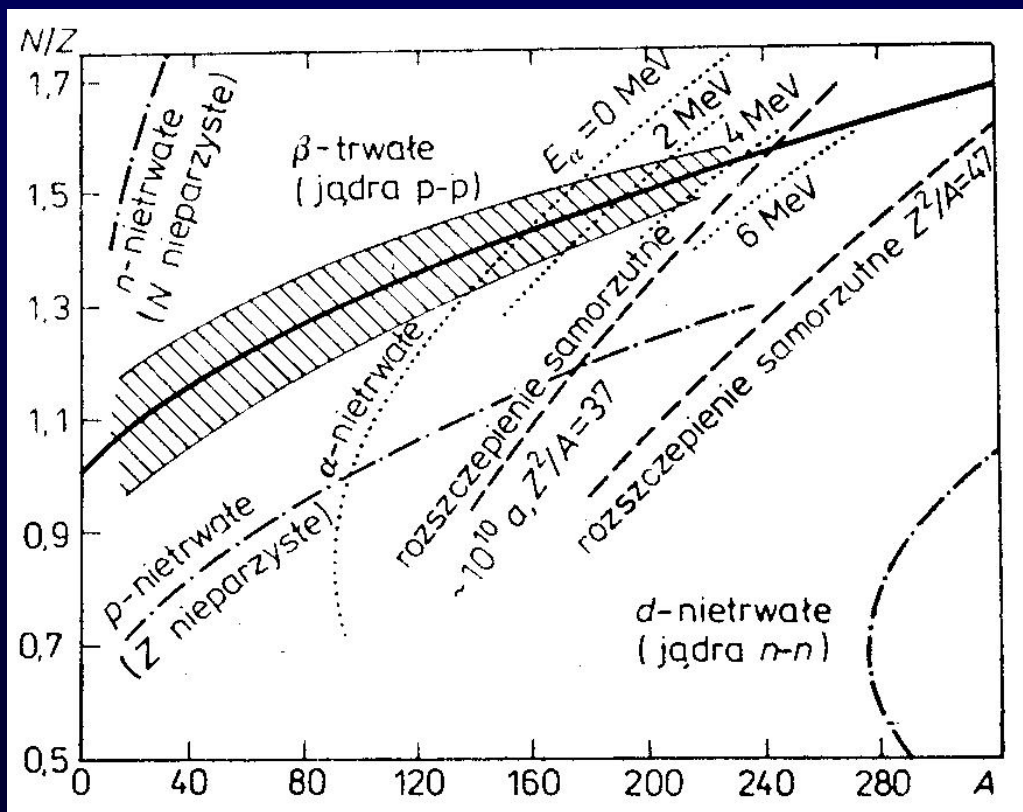
$$A$$

$$0.015 A^{2/3}$$

Granice możliwości uzyskiwania energii

- oderwanie od jądra cząstki α

$$E_{\alpha} = [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m(2, 4)]c^2 > 0$$



Granice możliwości uzyskiwania energii

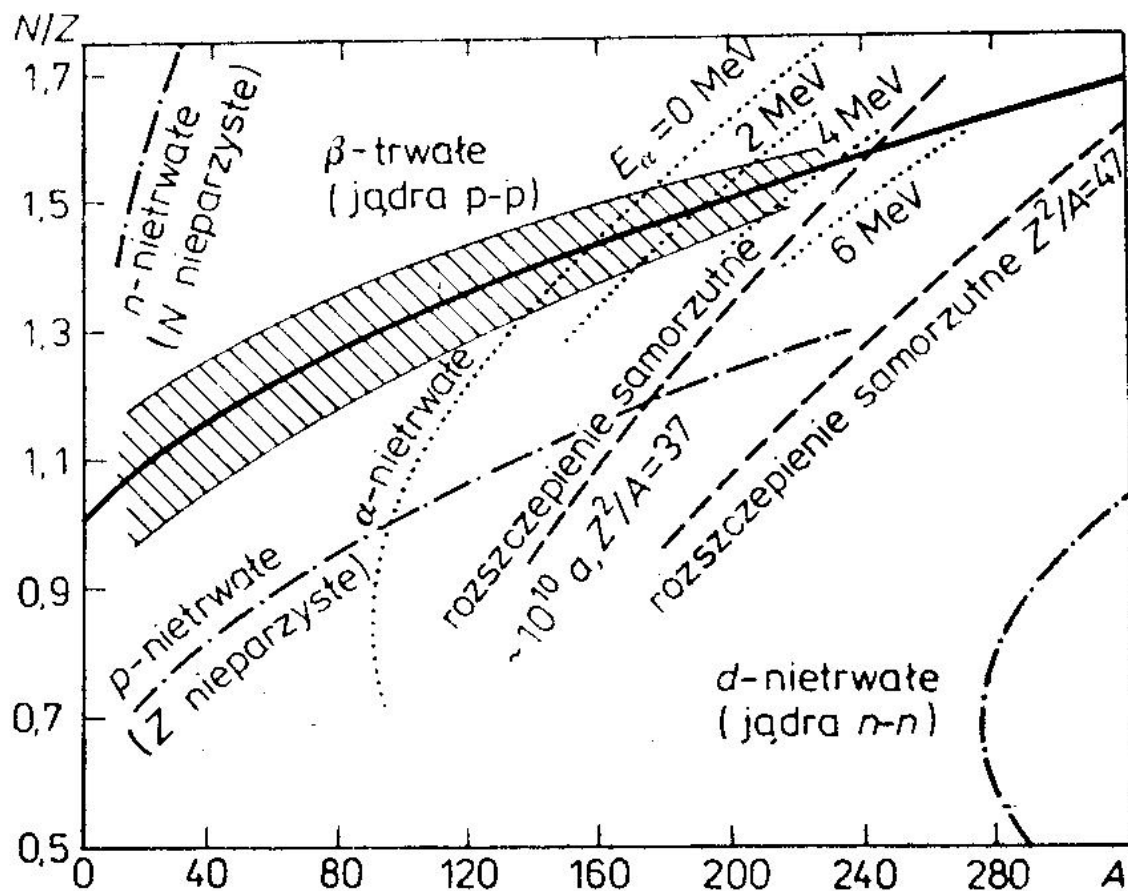
- proces rozszczepienia

$$E_f = [m(Z, A) - 2m(Z/2, A/2)]c^2 > 0$$

$$E_f / c^2 = a_s A^{2/3} \left(\frac{Z^2}{A} - 1 \right)$$

$$= (-5.12 \text{ MeV}) \left(\frac{Z^2}{A} - 1 \right)$$

zachodzi dla



Jądro - gaz Fermiego

- nukleony (cząstki o spinie $1/2$) znajdują się w studni potencjału
- w stanie podstawowym jądra zajęte są wszystkie stany dozwolone przez zakaz Pauliego i pomimo silnych oddziaływań pomiędzy nukleonami cząstka nie może zmieniać swego stanu ruchu
- nukleony nie mogą ulegać zderzeniom $\rightarrow$ jądro atomowe można w przybliżeniu traktować jako układ cząstek niezależnych

Dla dowolnie wybranego nukleonu można określić jego **stany własne** rozwiązując równanie Schrödingera w średnim potencjale jądra, na który składają się oddziaływania wszystkich innych nukleonów¹⁴

Postać średniego potencjału jądra nie jest z góry znana

założenia:

- określony przez same nukleony
- winien być zgodny z warunkiem, że jądro ma stosunkowo ostro określony brzeg
- prostokątny sferycznie symetryczny potencjał $V(r)$
 - o wartości $-V_0$ dla $r < R$
 - o wartości $V_0 = 0$ dla $r \geq R$

$$E = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$$

gdzie

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u_{ij}$$

układ swobodnych cząstek o spinie 1/2 zamkniętych
nieprzenikalną ścianą - model gazu Fermiego

ponieważ cząstki nie oddziałują ze sobą, to: $\rightarrow$

$$u_{ij} = 0$$

- wyznaczamy możliwe stany dla jednej z nich
- obsadzamy możliwe stany zgodnie z zakazem Pauliego

Niezależne od czasu równanie Schrödingera

dla cząstki w prostokątnej studni potencjału

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = E \Psi$$

$$\Psi(r) = X(x) + Y(y) + Z(z)$$

$$E = E_x + E_y + E_z$$

jego jednowymiarowa forma:

$$-\frac{\eta^2}{2m} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = E_x X(x)$$

to równanie postaci

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 X(x)$$

$$k = \frac{1}{\eta} \sqrt{2mE}$$

i ma rozwiązanie

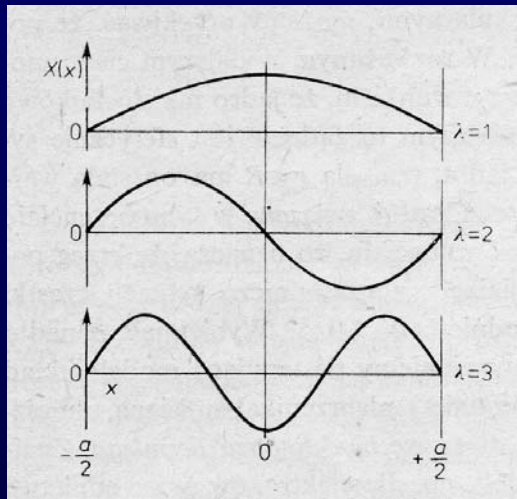
$$X_\lambda = A_\lambda e^{ik_\lambda x} + B_\lambda e^{-ik_\lambda x} = A_\lambda (\cos k_\lambda x + i \sin k_\lambda x) + B_\lambda (\cos k_\lambda x - i \sin k_\lambda x)$$

Wybór stałych A i B oraz wybór jednego z rozwiązań wynika z warunków brzegowych.

$$\Psi(\mathbf{r}) = C e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

Jeśli zamiast potencjału sferycznie symetrycznego wprowadzę potencjał w formie kostki o boku a , to warunki brzegowe są wówczas następujące:

$$X(x)=Y(y)=Z(z)=0 \text{ dla } x=y=z=\pm a/2$$



Rozwiązaniami są funkcje mające zera na granicach potencjału i z warunków brzegowych wynikają unormowane rozwiązania postaci

$$X_{\lambda}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cos k_{\lambda_x}^{+} x$$

$$X_{\lambda}^{-} = \frac{i}{\sqrt{2a}} \sin k_{\lambda_x}^{-} x$$

$$k_{\lambda_x}^{+} = \frac{\pi \lambda_x^{+}}{a},$$

$$\lambda_x^{+} = 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$k_{\lambda_x}^{-} = \frac{\pi \lambda_x^{-}}{a},$$

$$\lambda_x^{-} = 0, 2, 4, 6, \dots$$

możliwe wartości energii cząstki:

$$E_x^{(\lambda_x)} = \frac{\eta^2}{2m} k_{\lambda_x}^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \lambda_x \eta}{a} \right)^2, \quad \lambda_x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

dla rozwiązania trójwymiarowego zachodzi więc:

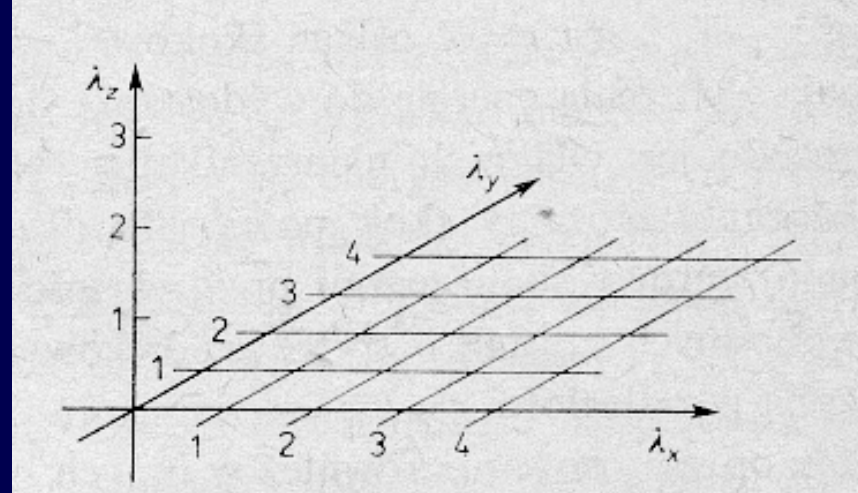
$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \eta}{a} \right)^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2)$$

związany z tą energią pęd:

$$p^2 = 2mE = \left(\frac{\pi \eta}{a} \right)^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2)$$

weźmy teraz prostokątny układ współrzędnych $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$.

Ponieważ λ przybiera wartości całkowite - współrzędne tworzą przestrzenną sieć punktów.



ponieważ
$$\lambda = \frac{ak}{\pi} = \frac{ap}{\pi\eta}$$

Objętość przestrzeni zdefiniowana przez te współrzędne jest proporcjonalna do iloczynu objętości przestrzeni położeń a^3 i objętości przestrzeni pędów p^3 , wyrażonej w jednostkach h^3 ,

$$\Omega \sim \lambda^3 \sim a^3 p^3$$

Przestrzeń położeń i pędów nosi nazwę **przestrzeni fazowej**

Liczba możliwych stanów dn , czyli liczba możliwych punktów siatki leżących w warstwie kulistej $\rho, \rho+d\rho$, gdzie $\rho^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2$, przy dostatecznej gęstości punktów jest równa objętości warstwy $d\Omega = 4\pi\rho^2 d\rho$

$$dn = \frac{1}{8} d\Omega = \frac{1}{2} \pi \rho^2 d\rho$$

Czynnik $1/8$ uwzględnia fakt, że punkty o dodatnich wartościach λ leżą tylko w $1/8$ kuli, więc

$$dn = \frac{\tau p^2 dp}{2\eta^3 \pi^2} = \frac{4\pi\tau p^2 dp}{h^3}, \quad a^3 = \tau$$

$$dn = \frac{\tau p^2 dp}{2\eta^3 \pi^2} = \frac{4\pi\tau p^2 dp}{h^3}, \quad a^3 = \tau$$

- ponieważ cząstka porusza się swobodnie w obrębie prostokątnej studni potencjału, równanie podaje liczbę możliwych stanów cząstki zamkniętej w objętości a^3 , przypadających na przedział pędu dp .
- równanie jest równoważne stwierdzeniu, że *w objętości przestrzeni fazowej równej h^3 znajduje się tylko jeden stan.*

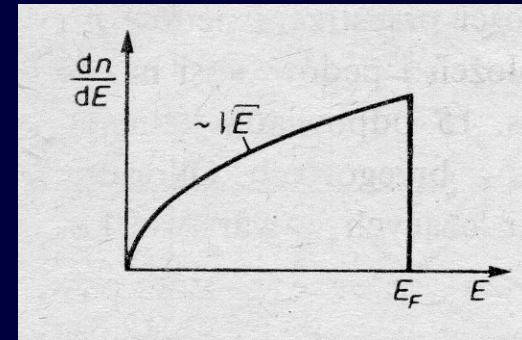


$$p^2 = 2mE, \quad p^2 dp = (2m^3 E)^{1/2} dE$$

$$dn = m^{3/2} \left(\sqrt{2} \pi^2 \eta^3 \right)^{-1} \tau \sqrt{E} dE = C_1 \tau \sqrt{E} dE$$

- w studni znajduje się pewna liczba cząstek o spinie 1/2
- w każdym stanie można umieścić tylko dwie cząstki
- poczynając od najniższego stanu obsadzamy coraz to wyższe
- założmy, że nie ma cząstek wzbudzonych (układ ma temperaturę $T=0$ K)

liczba cząstek na przedział energii $\sim E^{1/2}$



- gdy jedna z dwu cząstek ma w najwyższym z zajętych stanów energię E_F to liczba cząstek w studni potencjału wynosi

$$n = \int_0^{E_F} 2 \frac{dn}{dE} dE = 2C_1 \tau \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE = \left(\sqrt{8} m^{3/2} \right) \left(3\pi^2 \eta^3 \right)^{-1} \tau \cdot E_F^{3/2}$$

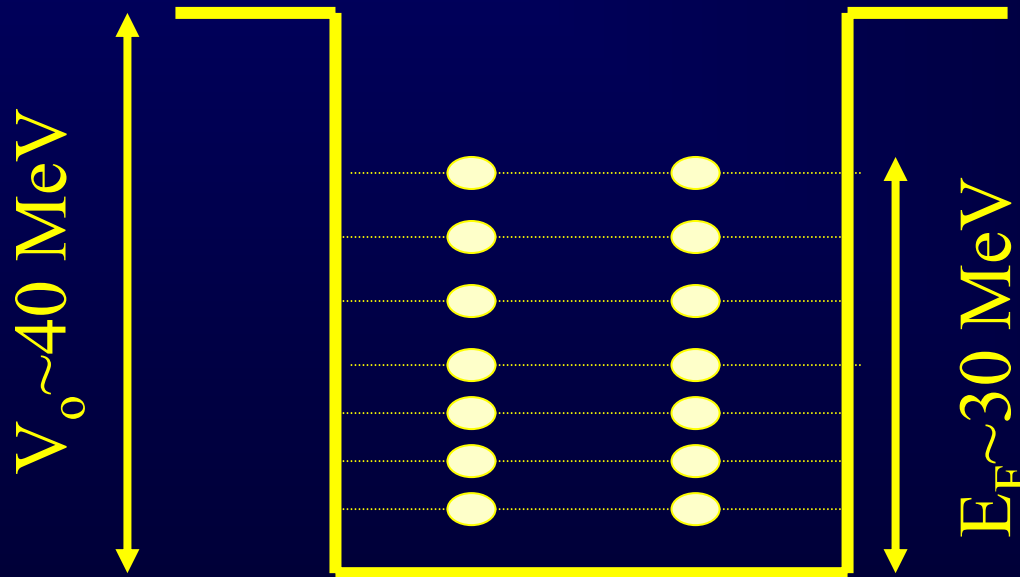
- gdzie *energia Fermiego*

$$E_F = \left(\frac{1}{2} m \right) 3^{2/3} \pi^{4/3} \eta^2 \left(\frac{n}{\tau} \right)^{2/3}$$

W przypadku jądra znana jest liczba cząstek i objętość jaką zajmują

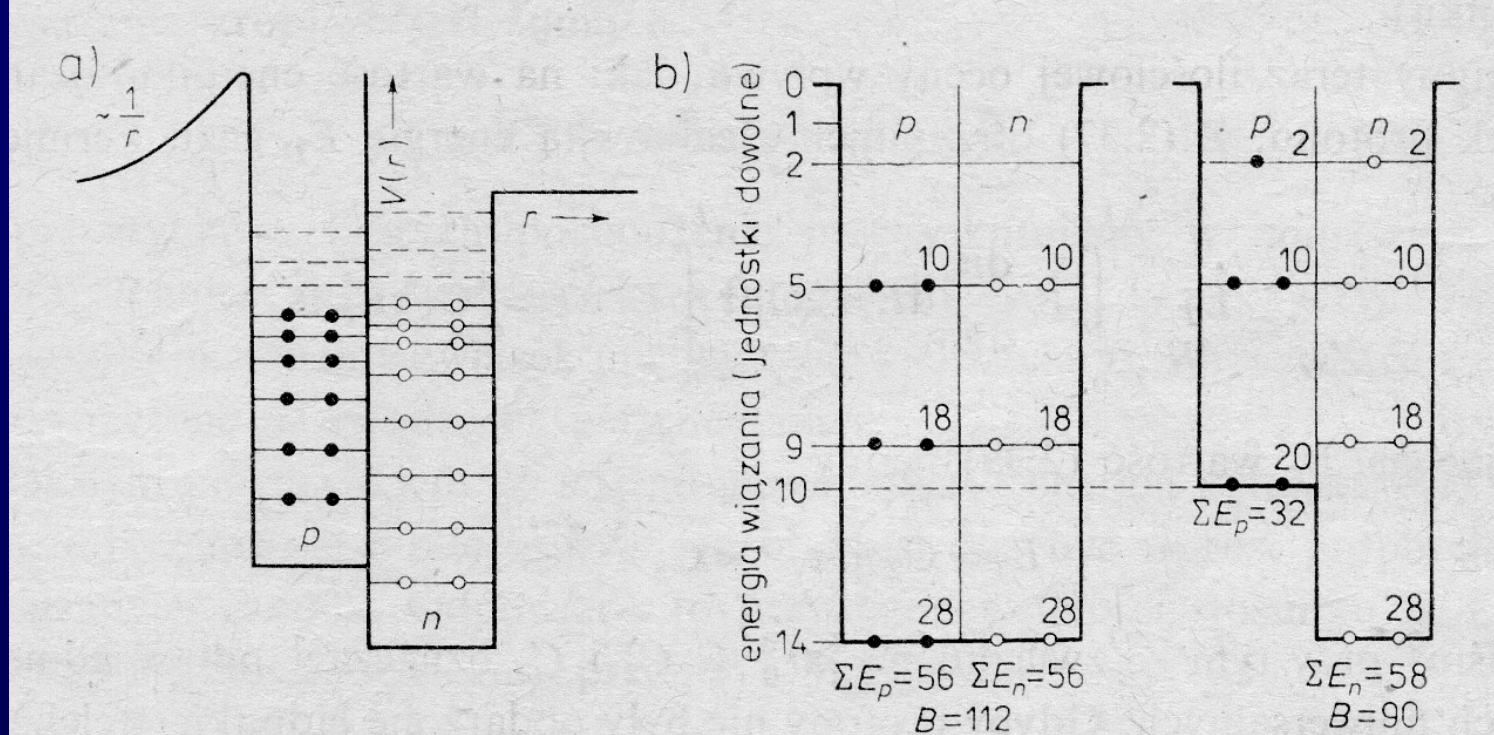


znajomość r_0 wystarcza do określenia wartości E_F .



Ponieważ mamy dwa rodzaje cząstek w jądrze -

- odpychająca siła kulombowska między protonami powoduje zmniejszenie ich energii wiązania w studni potencjału
- jądro to układ dwóch niezależnych od siebie gazów Fermiego, znajdujących się w odmiennych warunkach energetycznych



Przebieg potencjału i stany energetyczne w modelu gazu Fermiego dla protonów i neutronów

Porównanie energii wiązania w symetrycznym i niesymetrycznym gazie Fermiego

Nadmiar neutronów w większości trwałych jąder jest więc spowodowany tym, że w stanie równowagi w studni potencjału dla neutronów można zmieścić więcej cząstek, niż w studni potencjału dla protonów, która jest płytsza o wartość energii kulombowskiej.

Wpływ ładunku protonu na wartość energii wiązania jądra

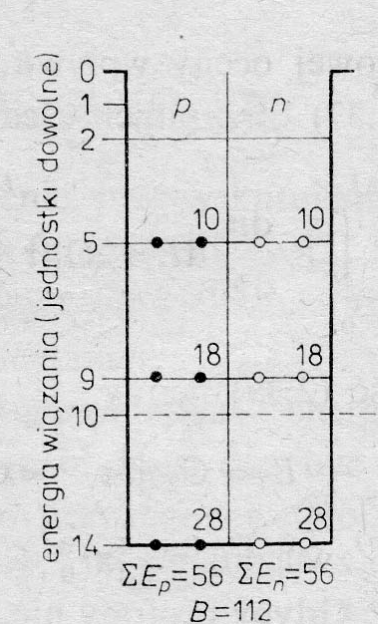
Całkowita energia E_T gazu Fermiego

$$E_T = \int_0^{E_F} E \frac{dn}{dE} dE = 2C_1 \tau \int_0^{E_F} E^{3/2} dE = \frac{4}{5} C_1 \tau E_F^{5/2}$$

$$E_F = \left(\frac{1}{2} m \right) 3^{2/3} \pi^{4/3} \eta^2 \left(\frac{n}{\tau} \right)^{2/3}$$

$$E_T = C_2 n^{5/3} \tau^{-2/3} = C_3 n^{5/3} A^{-2/3}$$

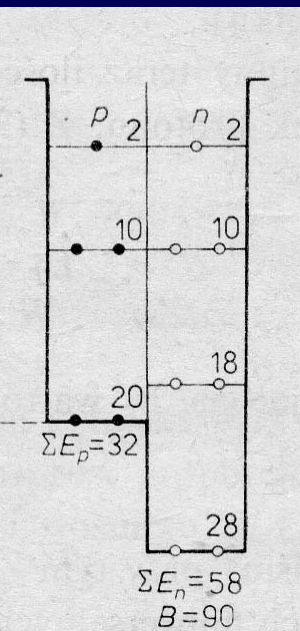
$$\tau = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$



Jeśli protony byłyby bez ładunku

i dla każdej części wstawilibyśmy $n=A/2$ i otrzymalibyśmy

$$E_T = 2C_3 \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} A^{-2/3}$$



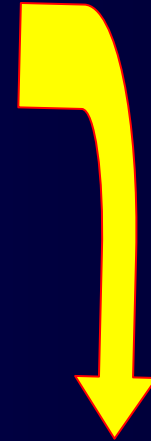
Ponieważ protony mają ładunek, to dla lewej części mamy $n=Z$ a dla prawej $n=N$ i otrzymamy

$$E_T = C_3 A^{-2/3} \left(N^{5/3} + Z^{5/3} \right)$$

z różnicy otrzymamy

$$\Delta E = C_3 A^{-2/3} \left(N^{5/3} + Z^{5/3} - 2 \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} \right)$$

$$T_Z = \frac{1}{2} (Z - N)$$



$$\Delta E = C_3 A^{-2/3} \left[\left(\frac{1}{2} A - T_Z \right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2} A + T_Z \right)^{5/3} - 2 \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} \right] \sim T_Z^2 / A$$



Stosując rozwinięcie dwumianowe piszemy

$$\left(\frac{A}{2} - T_z \right)^{5/3} = \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} (1 - 2T_z / A)^{5/3}$$

i rozwijamy jak

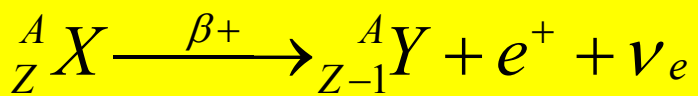
$$(1 - x)^p$$

Promieniotwórczość

Jądra nietrwałe

- jądra w stanie podstawowym, które w wyniku emisji cząstek mogą zmieniać się spontanicznie w jądra innego rodzaju
- jądra wzbudzone, które w wyniku oddziaływań elektromagnetycznych mogą przejść do stanu podstawowego

Procesy rozpadu jąder



określone

**prawdopodobieństwo przejścia
(rozpadu)**

$$\lambda = |C|^2,$$

gdzie amplituda przejścia

$$C = \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle,$$

zawiera stałe uniwersalne

i zależy od funkcji falowych jąder, które z kolei zależą od stałych charakteryzujących silne i słabe oddziaływania

prawdopodobieństwo rozpadu λ stanu nietrwałego jest wielkością rzeczywiście stałą

definicje

- stała rozpadu

$$dN = -\lambda N dt$$

- N - liczba nietrwałych jąder w chwili $t=0$
- prawdopodobieństwo rozpadu pojedynczego jądra w jednostce czasu (1/sek)
- dN - liczba jąder, które uległy rozpadowi w czasie dt

- **aktywność**

$$\left| dN/dt \right| = \lambda N \equiv A$$

Jednostki

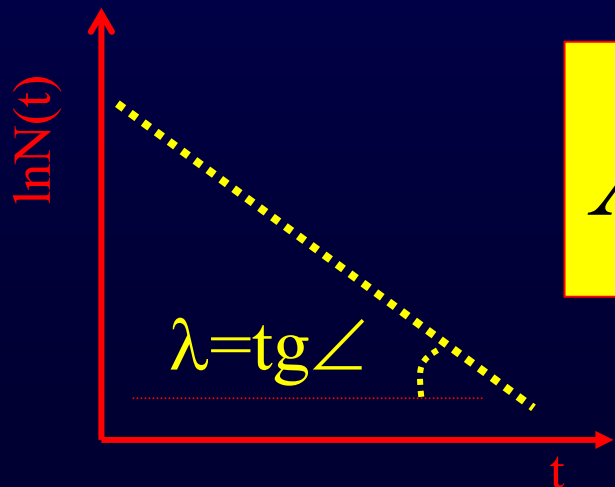
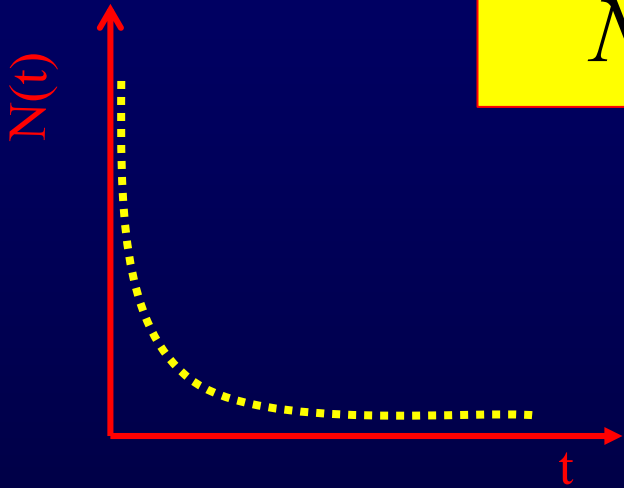
- $1 \text{ kiur} = 1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ rozpadów/s}$

- $1 \text{ bekerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ rozpad/s} = 0.27 \cdot 10^{-10} \text{ Ci}$

$$\int_{N_o}^N dN/N = \int_{t=0}^t -\lambda dt$$

$$\ln \frac{N}{N_o} = -\lambda t$$

$$N(t) = N_o e^{-\lambda t}$$



$$A = A_o e^{-\lambda t}, \quad A_o \equiv \lambda N_o$$

- **czas połowicznego zaniku**

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

- **średni czas życia**

$$\tau = 1 / \lambda$$

- krzywa wzrostu

$t=0$

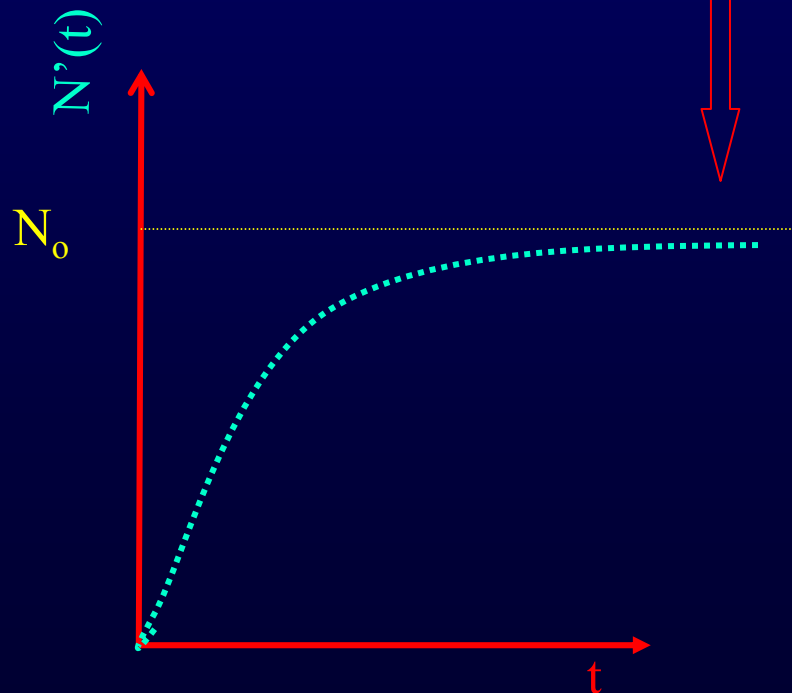
$M-N_o$

$P-0$

$t=t$

$M-N$

$P- N_o - N = N'$



$$N'(t) = N_o \left(1 - e^{-\lambda t} \right)$$

Rozpad sukcesywny



$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$$

$$N_1 = N_{01} e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{02} e^{-\lambda_2 t}$$

$$N_3 = N_{01} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right] + N_{02} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + N_{03}$$

Rozpad sukcesywny



jeśli dla $t=0$ $N_1=N_{01}$ i $N_{02}=N_{03}=0$



$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$$

$$N_1 = N_{01} e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$N_3 = N_{01} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right]$$

Mieszanina substancji radioaktywnych powiązanych genetycznie i pozostawionych na przeciąg pewnego czasu



- **przypadek I** $\lambda_2 \gg \lambda_1, \quad \lambda_1 \approx 0$

A_1 - aktywność substancji macierzystej

$$A_1 = \frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_{01} e^{-\lambda_1 t} \cong \lambda_1 N_{01} = \text{const}$$

małe

~ 1

A_2 - aktywność substancji pochodnej

$$A_2 = \lambda_2 N_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \cong \lambda_1 N_{01} (1 - e^{-\lambda_2 t})$$

A_2 początkowo narasta, lecz po kilku nT_2 $e^{-\lambda_2 nT_2} \cong 0$ i

$$A_2 \cong \lambda_1 N_{01} = A_1$$

Aktywność sumaryczna

$$A = A_1 + A_2 \xrightarrow{t > nT_2} 2A_1$$

Ze względu na małą wartość λ_1 aktywności są tu w przybliżeniu stałe w czasie i dlatego w takim przypadku mówimy o **promieniotwórczej równowadze wiekowej**

- **przypadek II** $\lambda_2 \gg \lambda_1, \quad \lambda_1 \approx 0$

A_1 - aktywność substancji macierzystej

$$A_1 = \frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_{01} e^{-\lambda_1 t}$$

A_2 - aktywność substancji pochodnej

$$A_2 = \lambda_2 N_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

co po kilku czasach połowicznego zaniku substancji 2 daje

$$A_2 = \lambda_2 N_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} e^{-\lambda_1 t}$$

Aktywność substancji pochodnej zmienia się w czasie z tą samą stałą rozpadu co aktywność substancji macierzystej. Po tym czasie stosunek aktywności substancji pochodnej i macierzystej wynosi

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Aktywność sumaryczna

$$A = A_1 + A_2 \xrightarrow{t > nT_2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \lambda_1 N_{01} e^{-\lambda_1 t}$$

Po czasie równym nT_2 wszystkie aktywności zmieniają się w czasie ze stałą rozpadu substancji macierzystej. Ten przypadek nazywamy **przejęciową równowagą promieniotwórczą**.

- **przypadek III**

$$\lambda_2 < \lambda_1$$

A_1 - aktywność substancji macierzystej

$$A_1 = \frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_{01} e^{-\lambda_1 t}$$

A_2 - aktywność substancji pochodnej

$$A_2 = \lambda_2 N_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Po kilku czasach nT_1

$$e^{-\lambda_1 n T_1} \cong 0$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} N_{01}$$

Aktywność sumaryczna

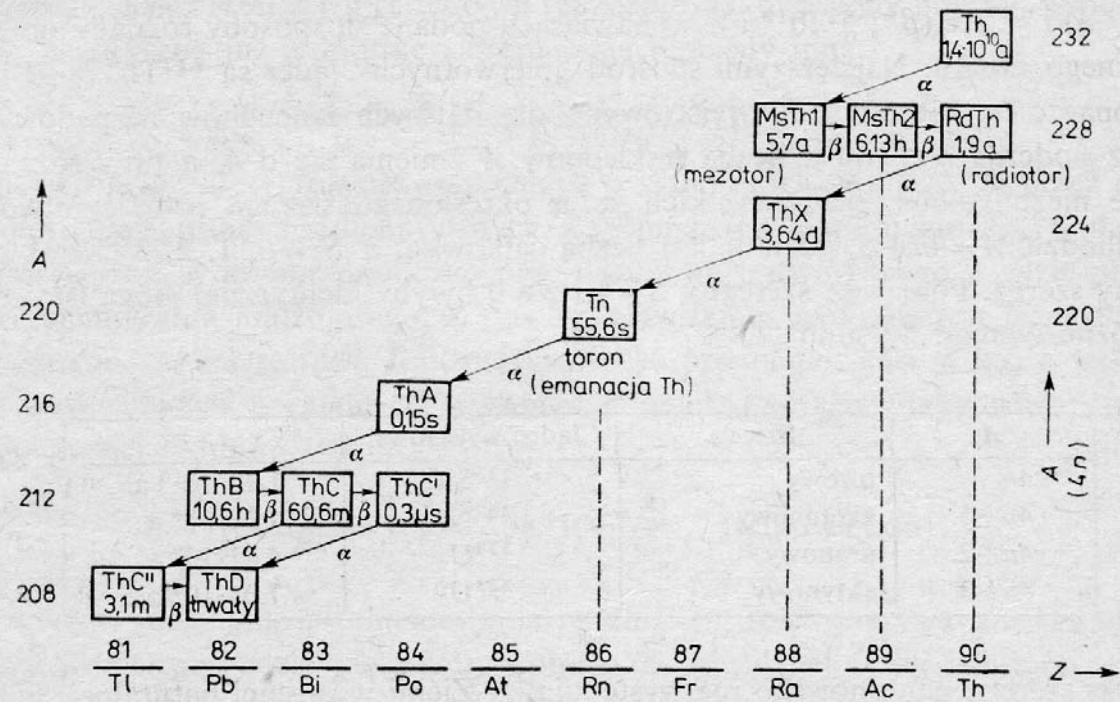
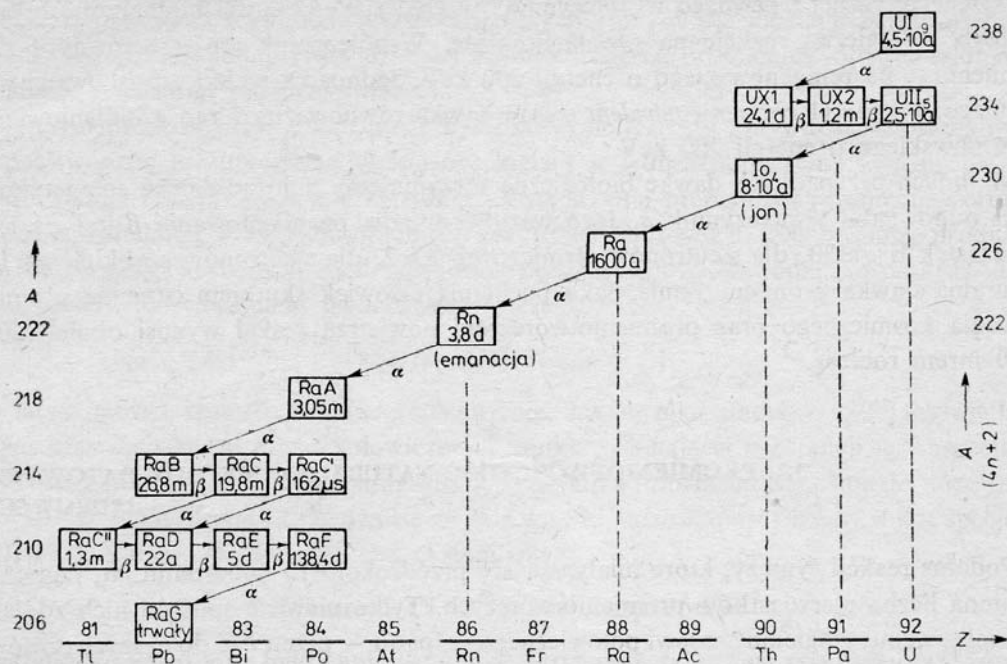
$$A = A_1 + A_2 \xrightarrow{t > nT_1} A_2$$

- szeregi promieniotwórcze

$$A=4n+s,$$

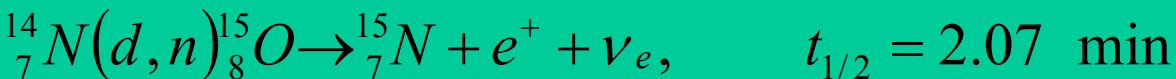
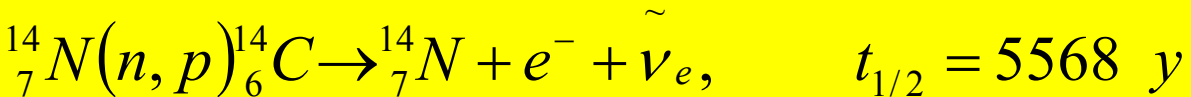
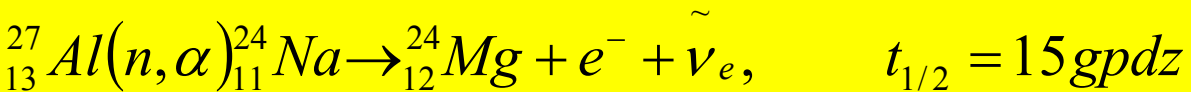
gdzie n jest liczbą całkowitą, a $s=0,1,2,3$

A	szereg	jądro wyjściowe	$t_{1/2}$
$4n$	torowy	^{232}Th	$1.4 \cdot 10^{10} \text{ y}$
$4n+1$	neptunowy	^{237}Np	$2.14 \cdot 10^6 \text{ y}$
$4n+2$	uranowy	^{238}U	$4.47 \cdot 10^9 \text{ y}$
$4n+3$	aktynowy	^{235}U	$7.04 \cdot 10^8 \text{ y}$



• sztuczna promieniotwórczość

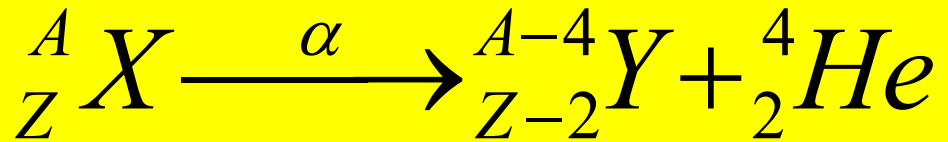
- jądra wytworzone w wyniku reakcji jądrowych
- podlegają tym samym prawom statystycznym



datowanie

dla
PET

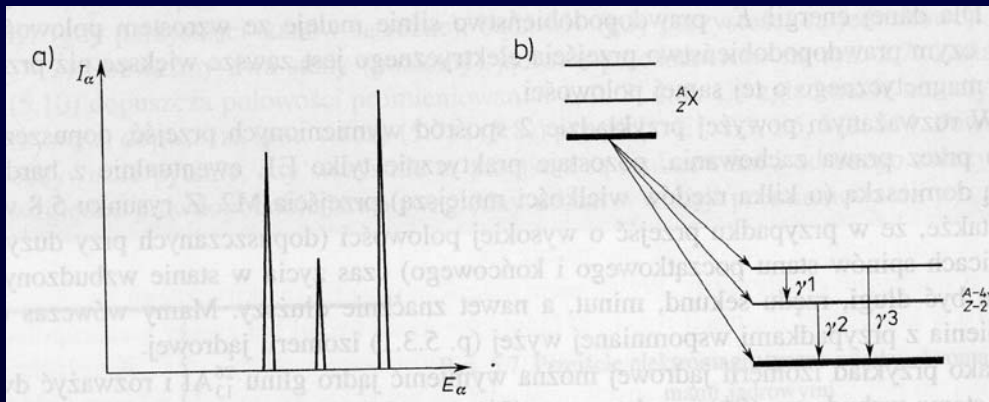
Rozpad α



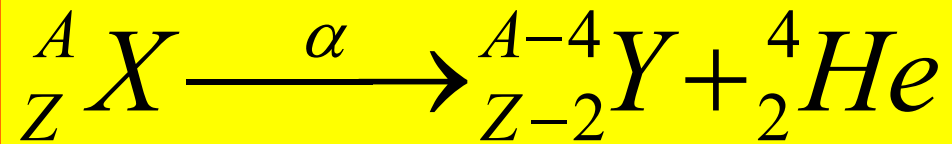
stosunki energetyczne

$$Q = M_X - (M_Y + m_\alpha) > 0$$

$$Q = E_Y + E_\alpha$$



Teoria rozpadu α



- tożsamość cząstek α z jądrami helu wykazał Rutherford w 1908
- energię cząstek określano za pomocą ich zasięgu w powietrzu (do ~ 1930 roku) później zaczęto stosować w tym celu spektrografy magnetyczne
- cząstka α o energii 5.3 MeV (${}^{210}\text{Po}$) ma w powietrzu zasięg 3.84 cm
- obecnie dokładny pomiar energii cząstek mierzy się za pomocą detektorów półprzewodnikowych

Czynniki od jakich zależy prawdopodobieństwo rozpadu α

teoria rozpadu na gruncie mechaniki kwantowej podana
przez G. Gamow'a

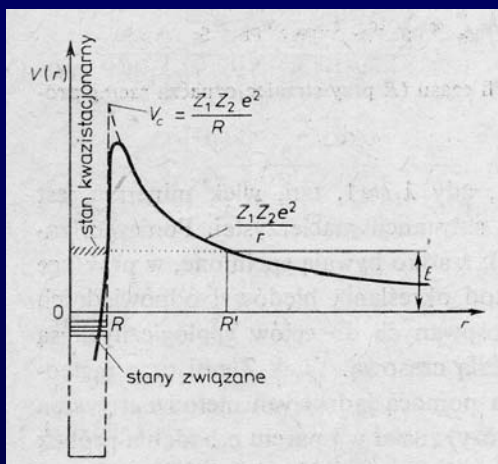
podczas łączenia cząstki α z jądrem

$$V(r) = Z_1 Z_2 e^2 / r$$

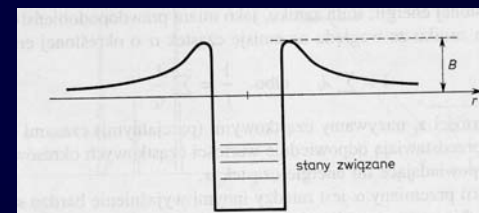
$$\text{gdy } r = R_1 + R_2 = R$$

zaczynają działać siły jądrowe to

$$V_C = Z_1 Z_2 e^2 / R$$

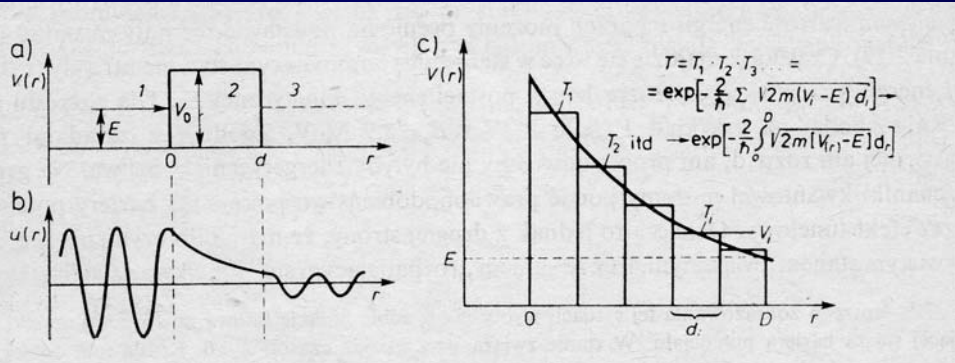


- cząstka α w jądrze zostaje związana w jądrze
- p i n znajdują się w prawdziwych stanach związanych o ujemnej energii
- cztery nukleony łącząc się w cząstkę α w jądrze znajdują się w kwazistacjonarnym, metatrwałym stanie o dodatniej energii - za to odpowiedzialna jest duża energia wiązania α



Prawdopodobieństwo λ emisji cząstki α to iloczyn

- prawdopodobieństwa λ_o utworzenia cząstki α
- prawdopodobieństwa T_α przeniknięcia bariery potencjału przez cząstkę α



$$\lambda = \lambda_o T_\alpha$$

$$T_\alpha = \frac{\text{liczba skutecznych prób przenikania}}{\text{liczba wszystkich prób przenikania}}$$

↑
współczynnik przenikania (transmisji)

$$T_{\alpha} = \frac{\text{liczba skutecznych prób przenikania}}{\text{liczba wszystkich prób przenikania}}$$

↑ współczynnik przenikania (transmisji)

≡

$$\frac{\text{strumień cząstek wychodzących poza barierą} - j_a}{\text{strumień cząstek dobiegających do bariery} - j_e}$$

$$\text{Strumień (cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{)} \quad j = |u|^2 v$$

↓ ↘
 prędkość cząstek

gęstość prawdopodobieństwa położenia cząstki opisanej funkcją falową $u(r)$ jest określona przez $|u|^2 = u^* u$

$$T_\alpha = \frac{j_a}{j_e} = \frac{|u_a|^2 v_a}{|u_e|^2 v_e} = \left| \frac{p = mv = \hbar k}{p = mv = \hbar k} \right| = \frac{|u_a|^2 k_a}{|u_e|^2 k_e}$$

Rozwiązując równanie Schrodingera w obszarach cząstki 1, 2 i 3

otrzymujemy rozwiązania

$$u_1 = \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r},$$

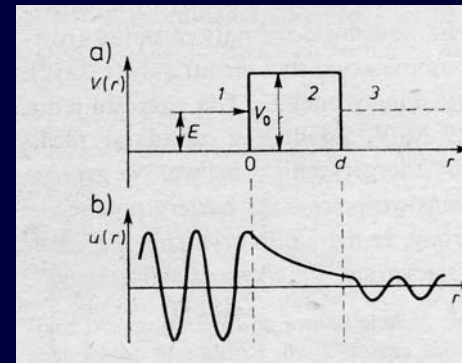
$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

$$u_2 = \alpha_2 e^{-k_2' r} + \beta_2 e^{k_2' r},$$

$$k_2' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$u_3 = \alpha_3 e^{ik_3 r}$$

$$k_2 = ik_2', 0$$



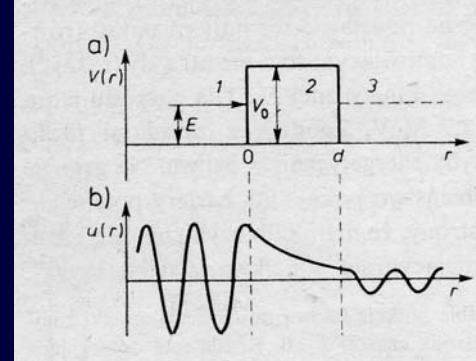
części rzeczywiste
na rysunku b)

Z warunku ciągłości na brzegach

$$u_1 = u_2, \quad u_1' = u_2' \quad \text{dla } r=0$$

$$u_2 = u_3, \quad u_2' = u_3' \quad \text{dla } r=d$$

i wstawieniu rozwiązań otrzymamy 4 równania określające 5 amplitud $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$ co pozwoli wyznaczyć stosunki dowolnych dwu



$$T_\alpha = \frac{|\alpha_3|^2}{|\alpha_1|^2} = \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|^2$$

Ponieważ $k_e = k_1 = k_3 = k_a$

$$T_\alpha = \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|^2 = \left[1 + \frac{V_o^2}{V_o^2 - (2E - V_o)^2} \sinh^2 k_2' d \right]^{-1}$$

dla grubej bariery
 $dk_2' \gg 1$

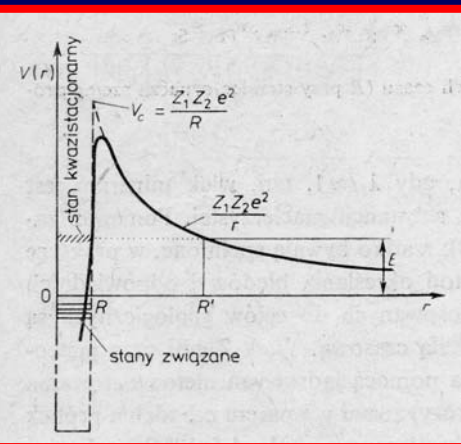


$$T_\alpha = 4 \frac{V_o^2 - (2E - V_o)^2}{V_o^2} e^{-2k_2' d}$$

$$T_{\alpha} = 4 \underbrace{\frac{V_o^2 - (2E - V_o)^2}{V_o^2}}_{\text{to jest } \sim 1} \underbrace{e^{-2k'_2 d}}_{\text{ten czynnik decyduje o wartości}}$$

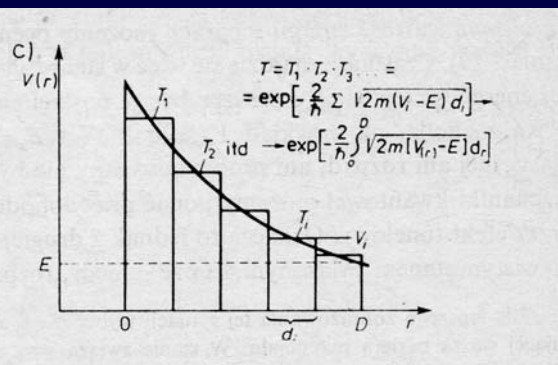
to jest ~ 1

ten czynnik decyduje o wartości



$$T_{\alpha} \approx \exp \left[- (2 / \eta) \sqrt{2m(V_o - E)} d \right]$$

dla bariery o dowolnej postaci $V(r)$



$$T_{\alpha} = \exp \left[- (2 / \eta) \int_0^D \sqrt{2m[V(r) - E]} dr \right]$$

dla bariery $V(r)$ postaci kulombowskiej

$$T_{\alpha} \approx e^{-G}, \quad \text{gdzie} \quad G = \frac{2\sqrt{2m}}{\eta} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E} dr$$

przedstawiając całkę w postaci skończonej

$$G = \frac{2}{\eta} \sqrt{2m / E Z_1 Z_2 e^2} \gamma(x)$$

$$\text{gdzie} \quad \gamma(x) = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}; \quad x \equiv R / R' = E / V_C$$

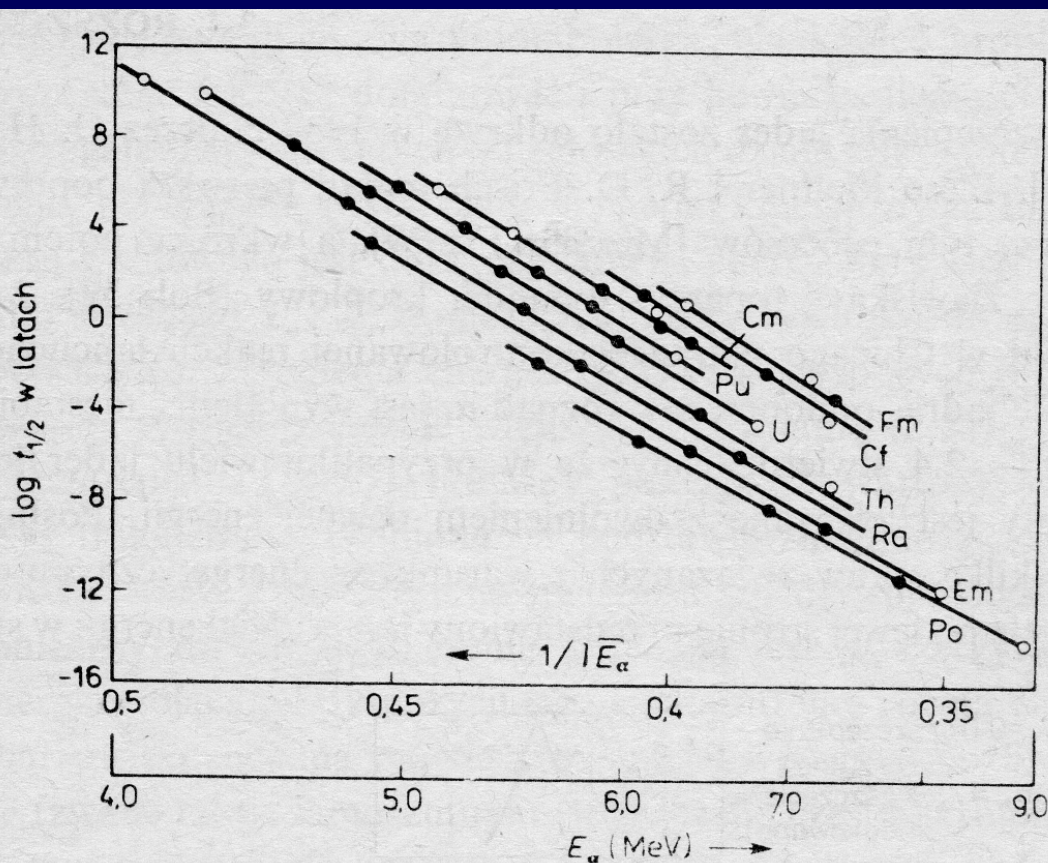
G - czynnik Gamowa

- maleje ze wzrostem energii
- czasy połowicznego zaniku są tym mniejsze im większa jest energia cząstek

$$t_{1/2} \sim 1/\lambda \sim 1/T \sim e^G, \quad \ln t_{1/2} \sim G \sim E_{\alpha}^{-1/2}$$

związek między stałą rozpadu i energią rozpadu E_α dla pierwiastków należących do tego samego szeregu α promieniotwórczego

$$\ln T_{1/2} = A + B \cdot 1/(E_\alpha)^{1/2}$$



A - stała w obrębie szeregu

B - stała dla wszystkich szeregów

Przykład:



$v_\alpha = 4 \cdot 10^9 \text{ cm/s}$ w jądrze o średnicy $\sim 10^{-12} \text{ cm}$



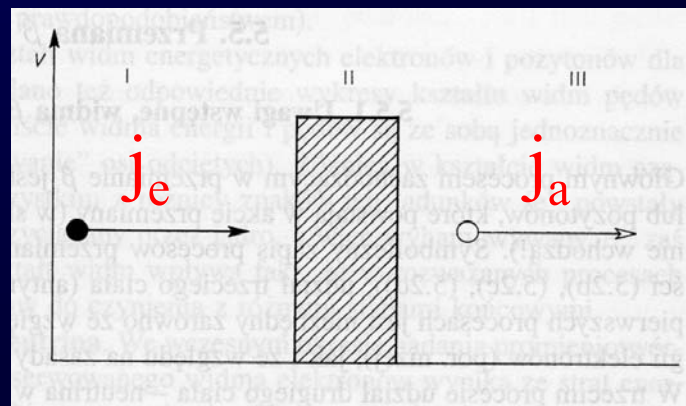
$\sim 10^{21}$ zderzeń/s

$j_a \sim 10^{-38}$, $j_e \sim (1 - 10^{-38}) \rightarrow 1$ na 10^{38} zderzeń z barierą
daje wyjście z jądra



Czas potrzebny na jeden rozpad

$10^{38} \text{ zderzeń/rozpad} / 10^{21} \text{ zderzeń/s} \sim \mathbf{10^{17} \text{ sek}}$



$$\lambda = \lambda_o T_\alpha$$

↑
?

↑
dominujące

λ_o – iloczyn

(1) prawdopodobieństwa utworzenia cząstki α we wnętrzu jądra

(2) prawdopodobieństwa napotkania przez tę cząstkę brzegu potencjału

Przyczynek (1) zależy od konfiguracji nukleonów w jądrze i może być oszacowany za pomocą rachunków modelowych.

Przyczynek (2) określony głównie przez energię kinetyczną cząstki i przez promień jądra.

$$\lambda = \lambda_o T_\alpha$$

Znając

z odpowiednią dokładnością postać potencjału jądrowego (z obserwacji rozproszeń)

oraz wartość T_α (wynikającą z rachunków)

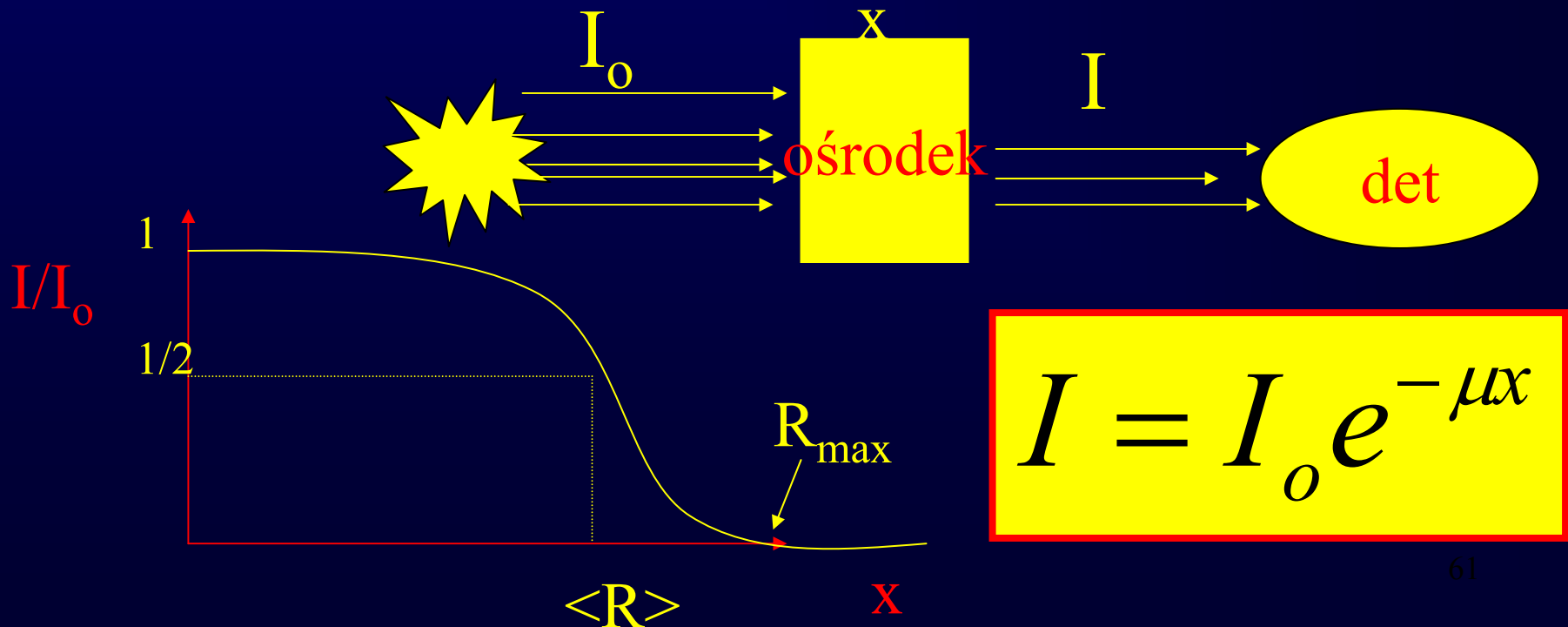
można wyznaczyć wartość λ_o na podstawie pomiaru czasu połowicznego zaniku

i

porównać ją z przewidywaniami poszczególnych modeli jądrowych.

Oddziaływanie cząstek α z materią

- przechodząc przez środowisko oddziałują poprzez pole elektrostatyczne z elektronami atomów - wyrywają je z powłok jonizując atomy
- oddziałują więc nieelastycznie z elektronami atomów tracąc stopniowo swoją energię



Jeśli przez $-dE/dx$ oznaczę stratę energii na jednostkę drogi, to z teorii mamy związek

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 Z_1^2}{m_e v^2} n Z_2 \ln \frac{2m_e v^2}{I}$$

gdzie:

v - prędkość cząstki

Z_1 - liczba atomowa cząstki

n - liczba atomów absorbenta w jednostce objętości

Z_2 - liczba atomowa tarczy

I - średni potencjał jonizacji absorbenta

$$I = 9.1Z \left(1 + \frac{1.9}{Z^{2/3}} \right) \quad (eV)$$

Przykładowe wartości I

powietrze - 80.5 eV

wodór - 15.6

aluminium - 150

ołów - 705

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 Z_1^2}{m_e v^2} n Z_2 \ln \frac{2m_e v^2}{I}$$

po przecałkowaniu / otrzymamy zasięg R

$$R = m Z^{-2} F(v_0)$$

m - masa cząstki

Z - liczba atomowa cząstki

F(v₀) - dla danego absorbenta funkcja zależna tylko od prędkości cząstki

dla E_{α} - 8 MeV

	R (cm)
powietrze	7.8
aluminium	0.0041
miedź	0.0018
złoto	0.0014

Rozpad β

$$\beta^- : n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e \longrightarrow$$

$$\beta^+ : p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

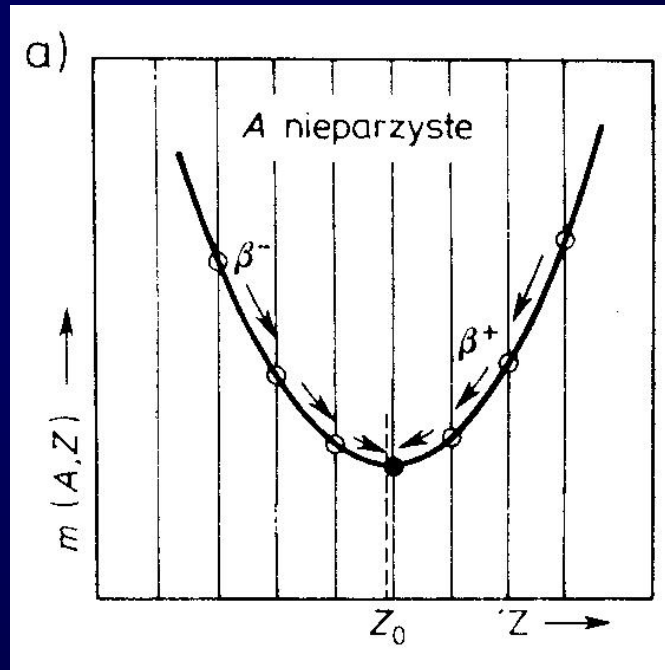
$$\text{WE: } p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$

może zachodzić dla n
swobodnego
z $t_{1/2}$ 10.6 min

- rozpad β zachodzi między izobarami – zmienia się tylko stan ładunkowy jądra
- zachodzi tylko wówczas, gdy istnieje sąsiednie jądro o mniejszej masie

Zależność masy w ciągu izobarów

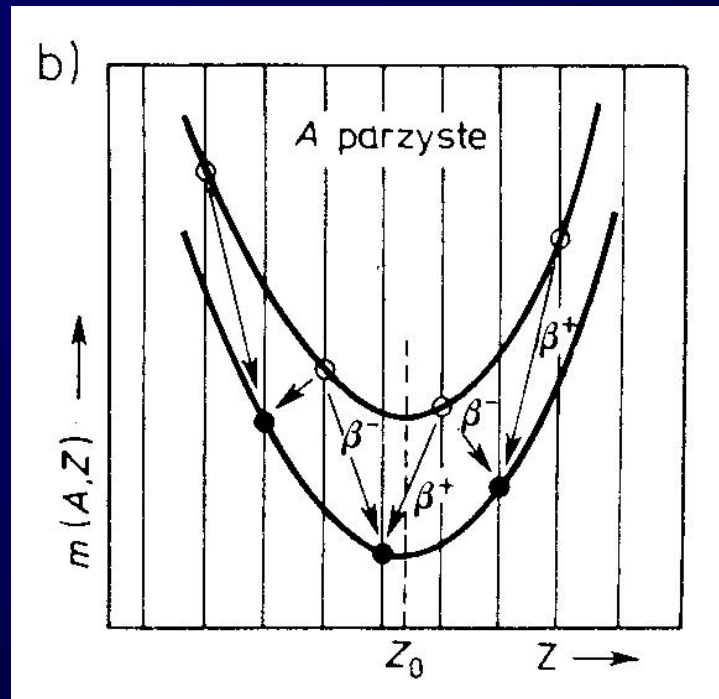
A-nieparzyste



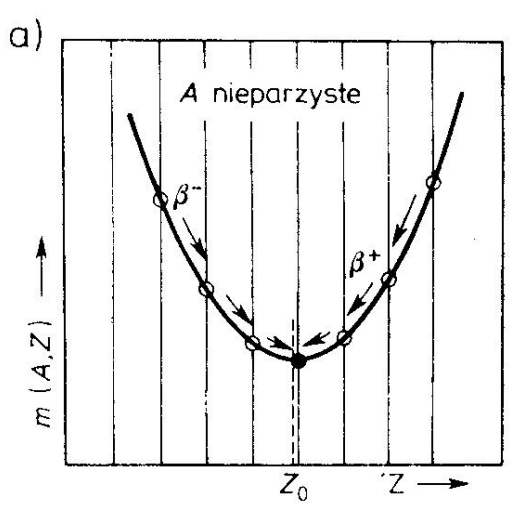
Istnieje tylko jeden izobar o minimalnej wartości masy – to izobar stabilny

Zależność masy w ciągu izobarów

A-parzyste

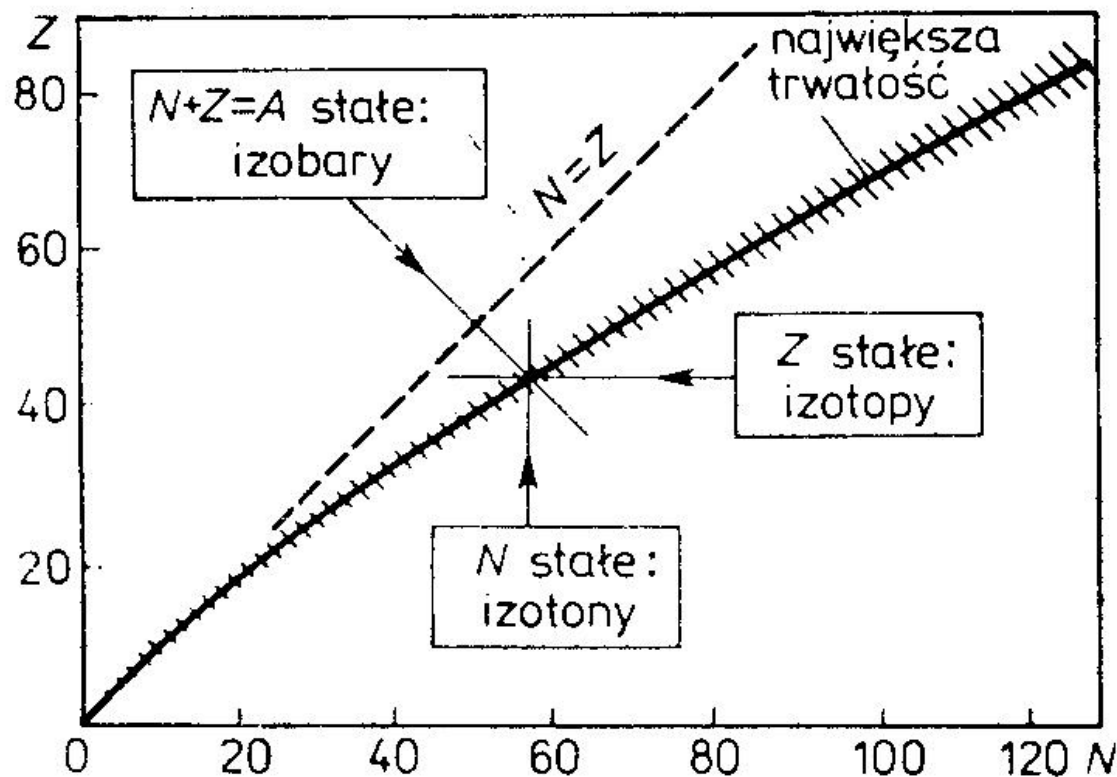
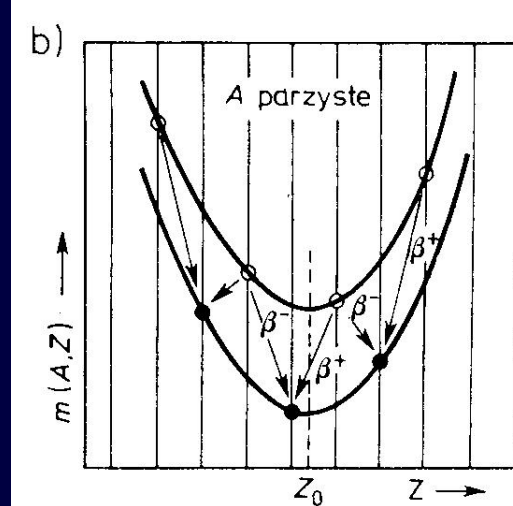


Istnieje tylko więcej niż jeden izobar o minimalnej wartości masy – to izobary stabilny



**Szukanie minimum
dla dowolnego jądra
o liczbach z i A**

to



$$m_p - m_n$$

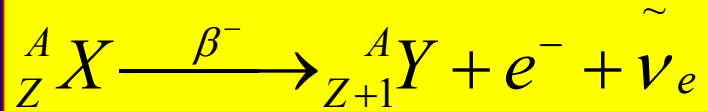
$$Z_0 = \frac{A}{2}$$

$$A^{-1} = 0$$

$$A$$

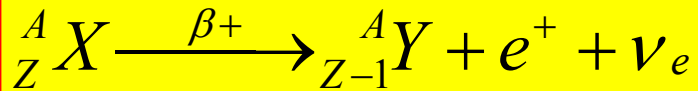
$$0.015 A^{2/3}$$

Stosunki energetyczne w rozpadzie β



$$M(Z,A) = M(Z+1,A) + Q$$

$$Q = T_Y + T_\beta + T_\nu = M_X - M_Y$$



$$M(Z,A) = M(Z-1,A) + 2m_e + Q$$

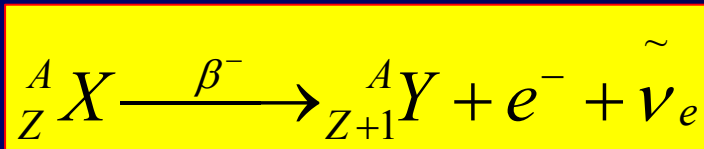
$$Q = T_Y + T_\beta + T_\nu = M_X - M_Y - 2m_e$$



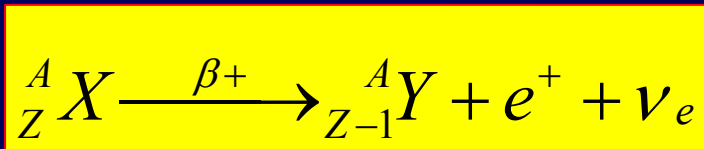
$$M(Z,A) = M(Z-1,A) + Q$$

$$Q = T_Y + T_\nu = M_X - M_Y$$

Warunek zajścia rozpadu – $Q > 0$



$$Q > 0 \quad \rightarrow \quad M_X > M_Y$$



$$Q > 0 \quad \rightarrow \quad M_X > M_Y + 2m_e$$

dla $0 \leq [M(Z,A) - M(Z-1,A)] < 2m_e$

- możliwy tylko WE

dla $[M(Z,A) - M(Z-1,A)] > 2m_e$

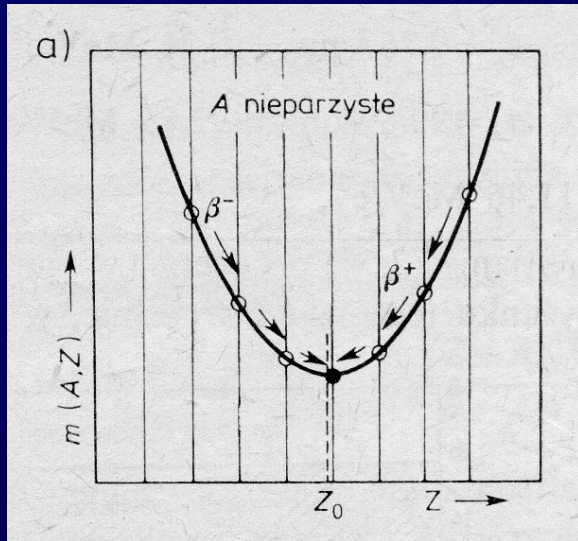
- możliwy WE
- możliwy β^+

Informacje modelu kropkowego o rozpadzie β

dla izobarów ($A=const$) zachodzi

$$M(Z,A)=C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2$$

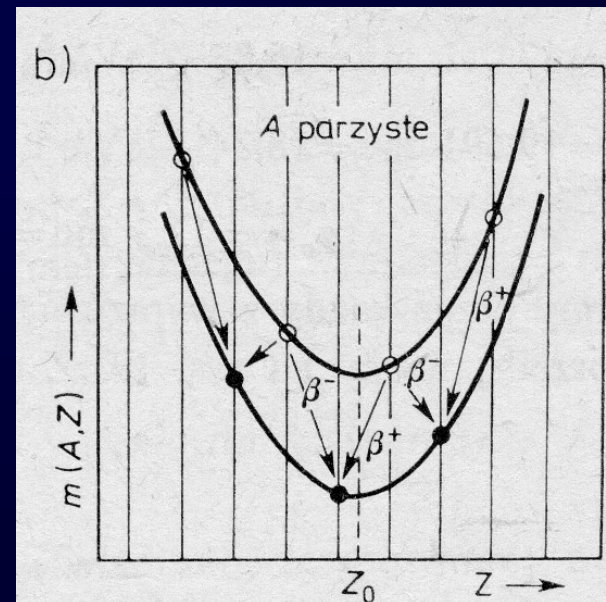
dla A nieparzystych



- stabilny izobar leżący najniżej tej paraboli

dla A parzystego

- mamy jądra parzysto-parzyste (niżej) i nieparzysto-nieparzyste (wyżej)
- między izobarami na tej samej paraboli nie może być przejść, gdyż ich Z różni się o 2



$$\left(\frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} \right)_{A=\text{const}} = 0$$

$$m_H - m_n + 2Z_0 a_c A^{-1/3} + 2a_A \left(Z_o - \frac{A}{2} \right) A^{-1} = 0$$

$$Z_0 = \frac{A}{2} \left[\frac{m_n - m_H + a_A}{a_c A^{2/3} + a_A} \right] = \frac{A}{1.98 + 0.015 A^{2/3}}$$

Neutrino

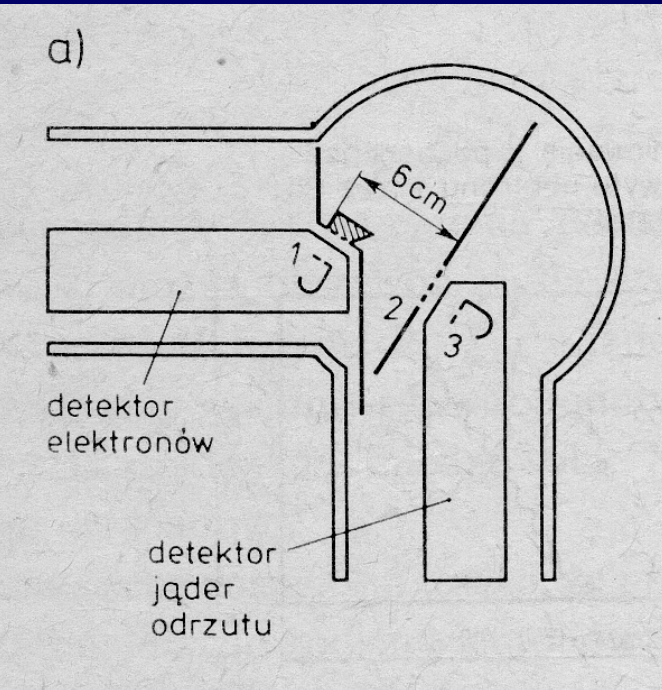
- ciągłe widmo rozpadu β
- energia emitowanych cząstek zawarta w przedziale $0 - E_{\max}$
- rozpad nie spełniał
prawa zachowania energii
- rozpad zachodzi między izobarami ($A=\text{const}$)
więc spiny jąder winny zmieniać się o liczbę całkowitą, a elektron ma spin $\frac{1}{2}$
- rozpad nie spełniał
prawa zachowania spinu

Pauli –
niezachwiane przekonanie
o słuszności praw zachowania



- propozycja istnienia nowej cząstki
- przejmuje część energii rozpadu
- ma spin połówkowy
- nie ma ładunku
- słabo oddziałuje z materią
- posiada swoją antycząstkę

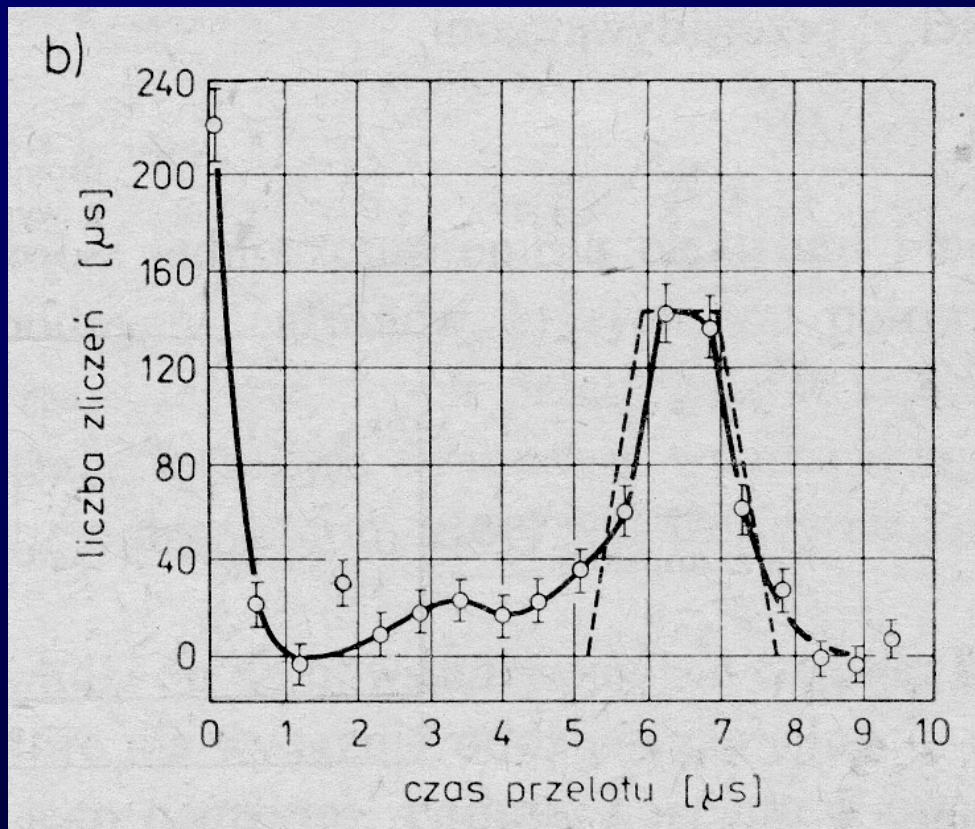
Doświadczalne potwierdzenie istnienia neutrina (pośrednie – przez pomiar jądra odrzutu)



jądro winno doznać odrzutu
by były spełnione zasady
zachowania energii i pędu

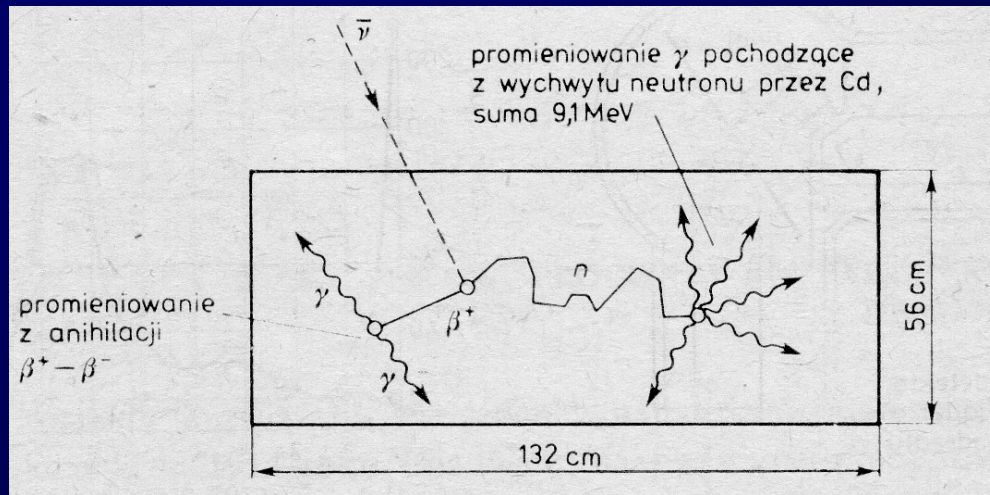
to wynik
różnicy mas

- Ar w postaci gazowej w miejscu zakreskowanym
- elektrony Augera rejestrowane w detektorze 1
- atomy Cl, które doznały odrzutu poruszają się w kierunku detektora 3 – przebiegają odcinek 6 cm i są następnie przyspieszane przez siatkę 2
- wielkością mierzona jest opóźnienie czasowe między sygnałem detektora 1 i 3



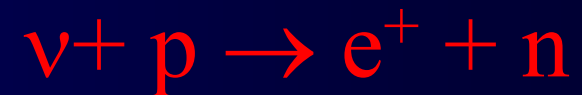
wynik doświadczenia
+
linia przerywana – to
krzywa teoretyczna w
przypadku energii
odrzutu atomów Cl
równej 9.6 eV jaka
wynika z wartości pędu
neutrina
odpowiadającego
różnicy mas ^{37}Ar i ^{37}Cl

Doświadczalne potwierdzenie istnienia neutrina (bezpośrednie – doświadczenie Cowansa i Reinesa)



tu wykorzystano silny
strumień neutrin z
reaktora jądrowego

Proces



obserwowano w
scyntylicatorze zawierającym
H z domieszką Cd

W celu jednoznacznej
identyfikacji należy
zarejestrować:

- impulsy od kwantów anihilacji
- promieniowanie wysyłane
przez Cd

Znając strumień antyneutrin oraz wydajność scyntylatora
można wyznaczyć przekrój czynny reakcji

dla antyneutrin emitowanych podczas rozszczepienia jąder
otrzymuje się wartość

$$7 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^2 = 7 \cdot 10^{-19} \text{ barna}$$

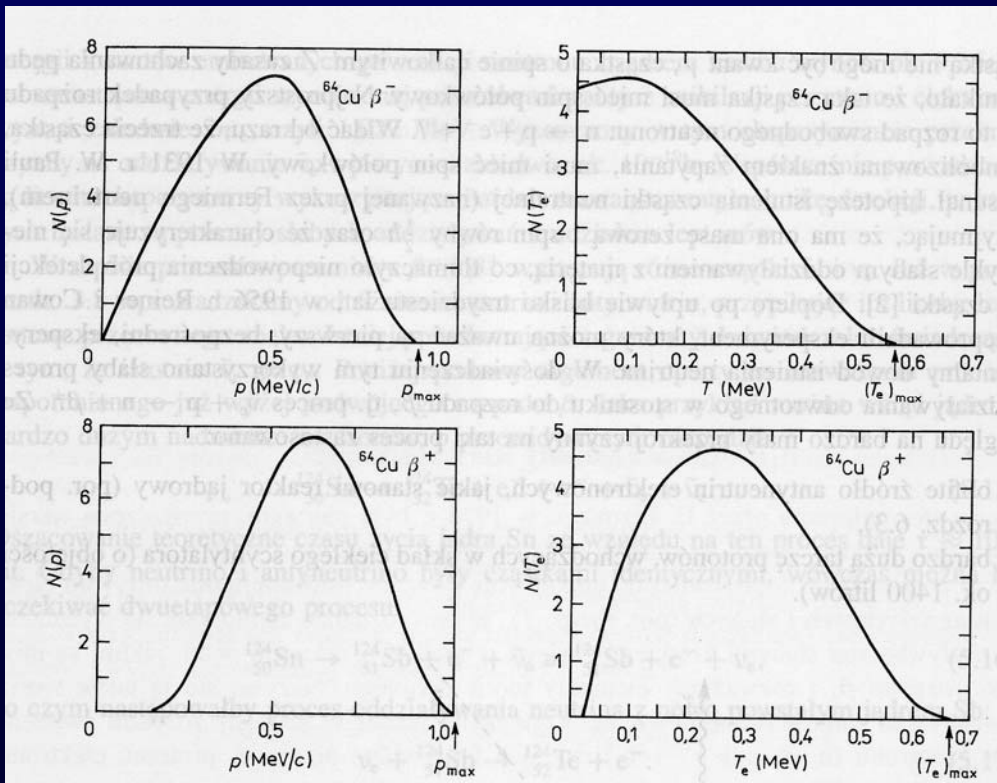
Teoria rozpadu β (Enrico Fermi)

- rozpad β to wynik oddziaływania między obiektami fizycznymi całkowicie nieznanego fizyce klasycznej
- nowe oddziaływanie występuje obok grawitacyjnego, elektromagnetycznego i silnego
- ponieważ procesy rozpadu β mają znacznie mniejsze prawdopodobieństwo przejścia niż procesy rządzone przez siły jądrowe czy elektromagnetyczne, mówimy w tym przypadku o

oddziaływaniach słabych

Teoria rozpadu β (Enrico Fermi)

- musi dobrze opisywać przebieg widma emitowanych elektronów –
mierzonego np. przy pomocy spektrometru magnetycznego lub detektora półprzewodnikowego



Stwierdza się
wyraźną różnicę
kształtu widma

Prawdopodobieństwo emisji elektronu z pędem p , $p+dp$

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\eta} \left| \langle f | H | i \rangle \right|^2 \frac{dn}{dE_o}$$

$\langle f | H | i \rangle$ - operator przejścia między stanami i i f

$$\langle f | H | i \rangle = \int \Psi_f^* H \Psi_i d\tau \equiv H_{fi}$$

- z góry nieznany, gdyż zawiera operator Hamiltona opisujący oddziaływania słabe

$\frac{dn}{dE_o}$ - gęstość możliwych stanów końcowych

eksperymenty pokazują, że kształt widma jest głównie określony przez czynnik dn/dE , natomiast element macierzowy zależy co najwyżej bardzo słabo (lub w ogóle nie zależy) od energii.

Jak długo

$$\langle f | H | i \rangle = \int \Psi_f^* H \Psi_i d\tau \equiv H_{fi}$$

jest stały – tak długo kształt

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\eta} \left| \langle f | H | i \rangle \right|^2 \frac{dn}{dE_o}$$

jest określony przez czynnik statystyczny.

eksperymenty pokazują, że kształt widma jest głównie określony przez czynnik dn/dE , natomiast element macierzowy zależy co najwyżej bardzo słabo (lub w ogóle nie zależy) od energii.

Jak długo

$$\langle f | H | i \rangle = \int \Psi_f^* H \Psi_i d\tau \equiv H_{fi}$$

jest stały – tak długo kształt

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\eta} \left| \langle f | H | i \rangle \right|^2 \frac{dn}{dE_o}$$

jest określony przez czynnik statystyczny.

Korzystając z wyprowadzonej zależności na liczbę możliwych stanów w określonej objętości przestrzeni fazowej i ...

zakładając, że wszystkie rozkłady energii między elektronem i neutrino są równie prawdopodobne otrzymuje się widmo pędów cząstek β

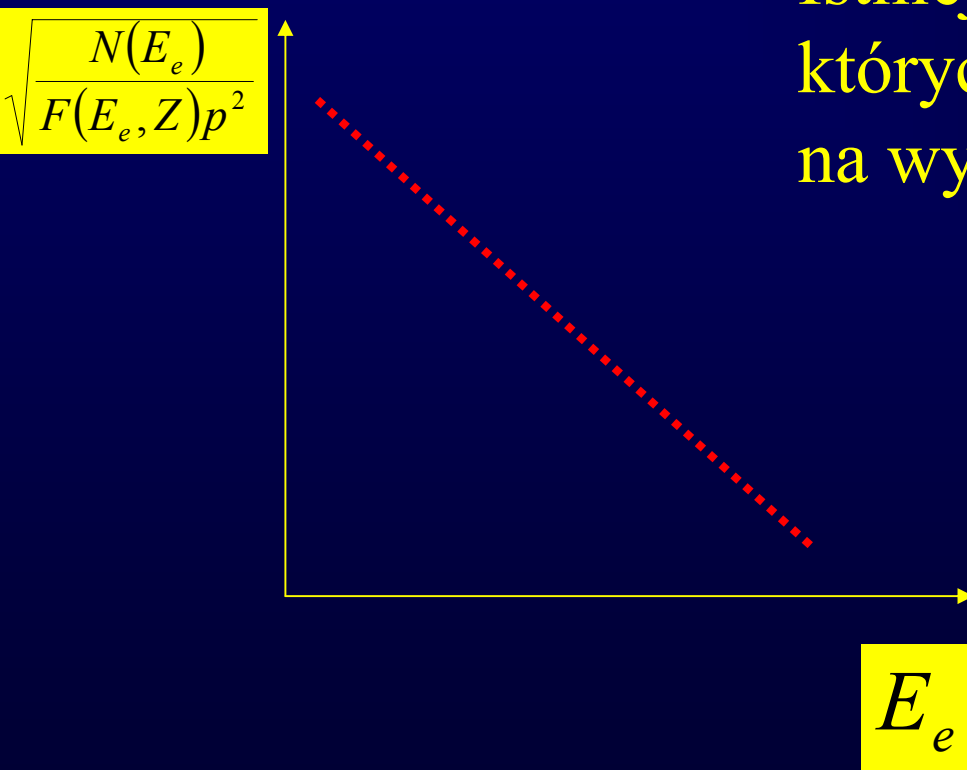
$$N(E_e)dE_e = \frac{1}{2\pi^3 \eta^7 c^5} |H_{fi}|^2 p^2 (E_o - E)^2 F(E_e, Z) dE_e$$

$E_o = E_e + E_v$ - maksymalna energia w widmie

$F(E, Z)$ – czynnik uwzględniający oddziaływanie kulombowskie cząstek z jądrem

$$\sqrt{\frac{N(E_e)}{F(E_e, Z)p^2}} = \sqrt{\frac{|H_{if}|^2}{2\pi^3 \eta^7 c^5}} (E_o - E_e)$$

Istnieje pewna grupa rozpadów β , dla których lewa strona jest linią prostą na wykresie **Curie** (lub Fermiego)



Szczególnie prosto jest z takiego wykresu odczytać maksymalną energię E_o elektronów lub pozytonów

Oddziaływanie cząstek β z materią

- przechodząc przez środowisko oddziałują poprzez pole elektrostatyczne z elektronami atomów - wrywają je z powłok jonizując atomy
- oddziałują więc nieelastycznie z elektronami atomów tracąc stopniowo swoją energię
- elastyczne zderzenia z jądrami lub elektronami
- nieelastyczne zderzenia, w których elektron traci część swojej energii na promieniowanie elektromagnetyczne, tzw. promieniowanie hamowania

Wprowadzamy przekroje czynne na poszczególne procesy

$$\sigma_{\text{jonizacja}} = 8\pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{Z^2}{\beta^4} \ln \frac{E\sqrt{2}}{I},$$

Z – liczba atomowa absorbenta

I – średni potencjał jonizacji

lecz

$$4\pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \approx 10^{-24} \text{ cm}^2 = 1b$$

$$\sigma_{\text{jonizacja}} = 2 \frac{Z^2}{\beta^4} \ln \frac{E\sqrt{2}}{I} \quad [\text{b/atom}]$$

$$\sigma_{\text{elast-jadr}} \cong \frac{1}{4} \frac{Z^2}{\beta^4}, \quad \text{dla } \vartheta > 90^\circ$$

[b/atom]

$$\sigma_{\text{elast-elekt}} \cong 2 \frac{Z^2}{\beta^4}, \quad \text{dla } \vartheta > 45^\circ$$

$$\sigma_{\text{nieelast-hamow}} \cong \frac{8}{3\pi} \frac{1}{137} \frac{Z^2}{\beta^4}$$

[b/atom]

dla elektronów o energii 0.1 MeV

	σ_j	σ_{e-j}	σ_{e-e}	σ_n
powietrze	1700	150	230	1.3
Pb	13700	20000	2600	170

Absorpcja elektronów

dE/dx – zależy od energii elektronów i rodzaju absorbenta

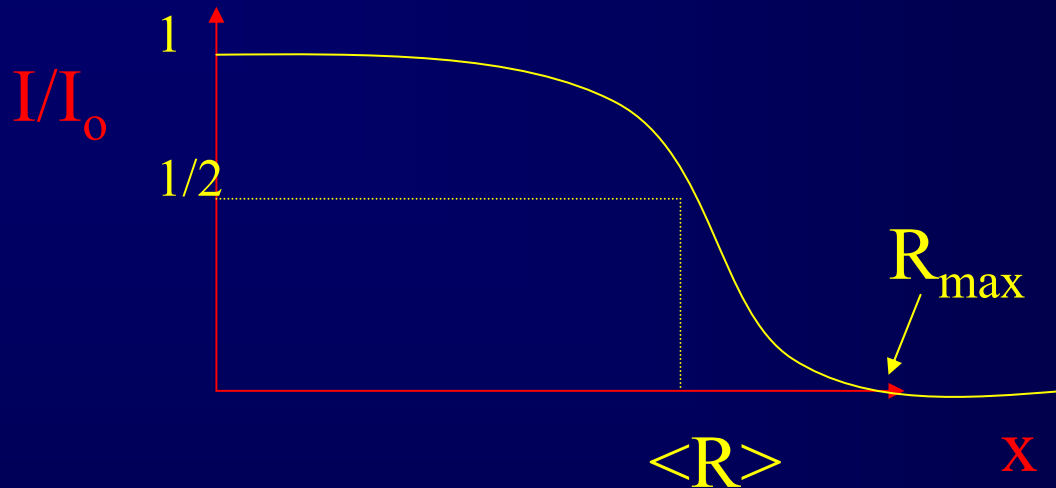
- dla wysokich energii $E \gg 137 m_e c^2 / Z^{1/3}$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{L} E$$

$$E(x) = E_0 e^{-x/L}, \quad L - \text{długość radiacyjna}$$

- elektrony wysokich energii wytwarzają w materii pęki promieniowania hamowania, z których powstają pary e^+e^-

Dla monoenergetycznych elektronów otrzymamy



$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

μ - współczynnik absorpcji

mamy empiryczne wzory określające zależności zasięg-energia, np.

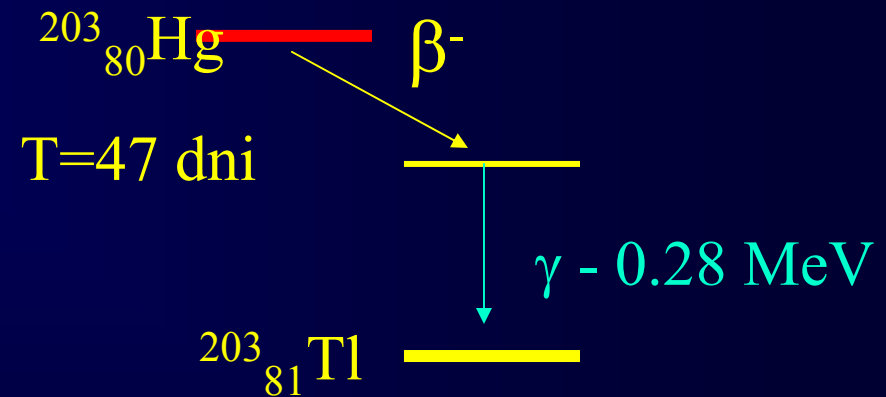
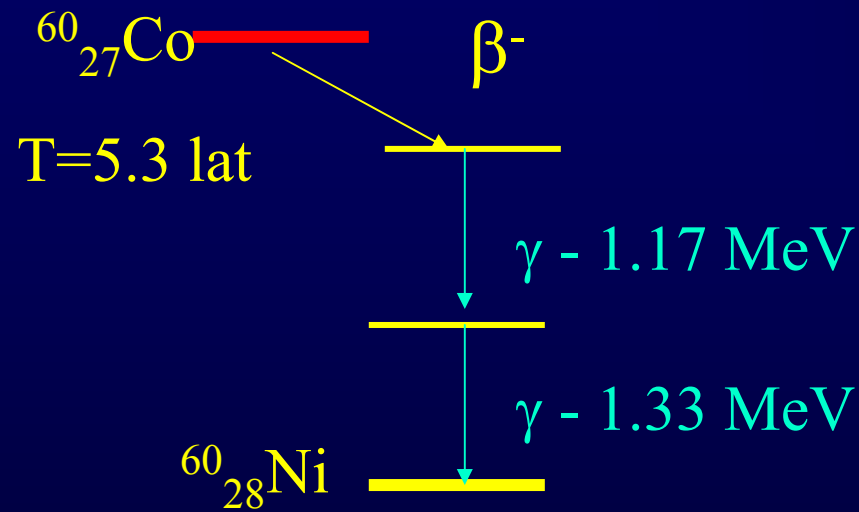
dla Al

$$R = 0.412 E^{1.256 - 0.0954 \ln E}, \quad \text{dla} \quad E \leq 3 \text{ MeV}$$

$$R = 0.53 E - 0.106, \quad \text{dla} \quad 3 \text{ MeV} \leq E \leq 20 \text{ MeV}$$

Przemiana γ - to przejście ze stanu wzbudzonego do podstawowego

$$Q_\gamma = E_i - E_f = h\nu$$



$$E = E_\gamma + T_j, \quad 0 = p_\gamma + p_j$$

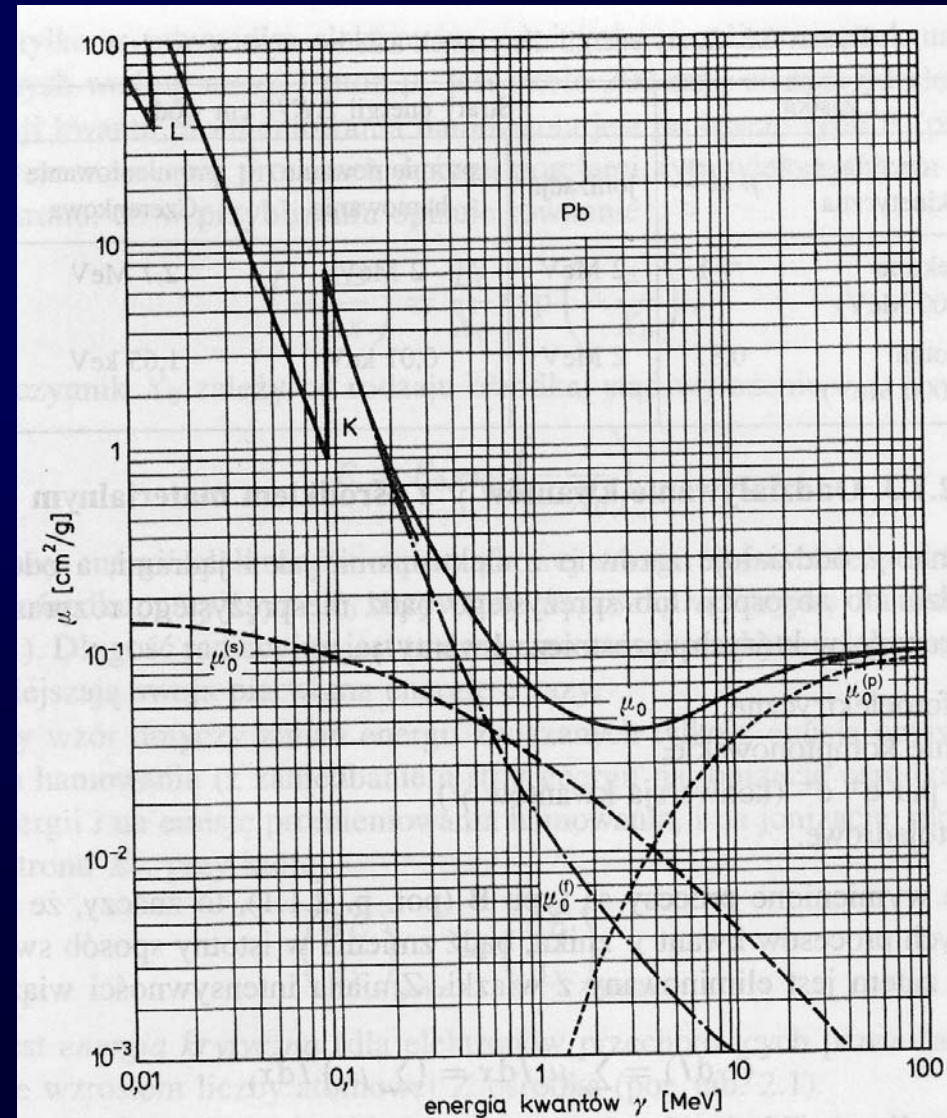
$$T_j = \frac{E_\gamma^2}{2M_j c^2} \approx \frac{E^2}{2M_j c^2}$$

Oddziaływanie promieniowania γ z materią

podstawowe procesy

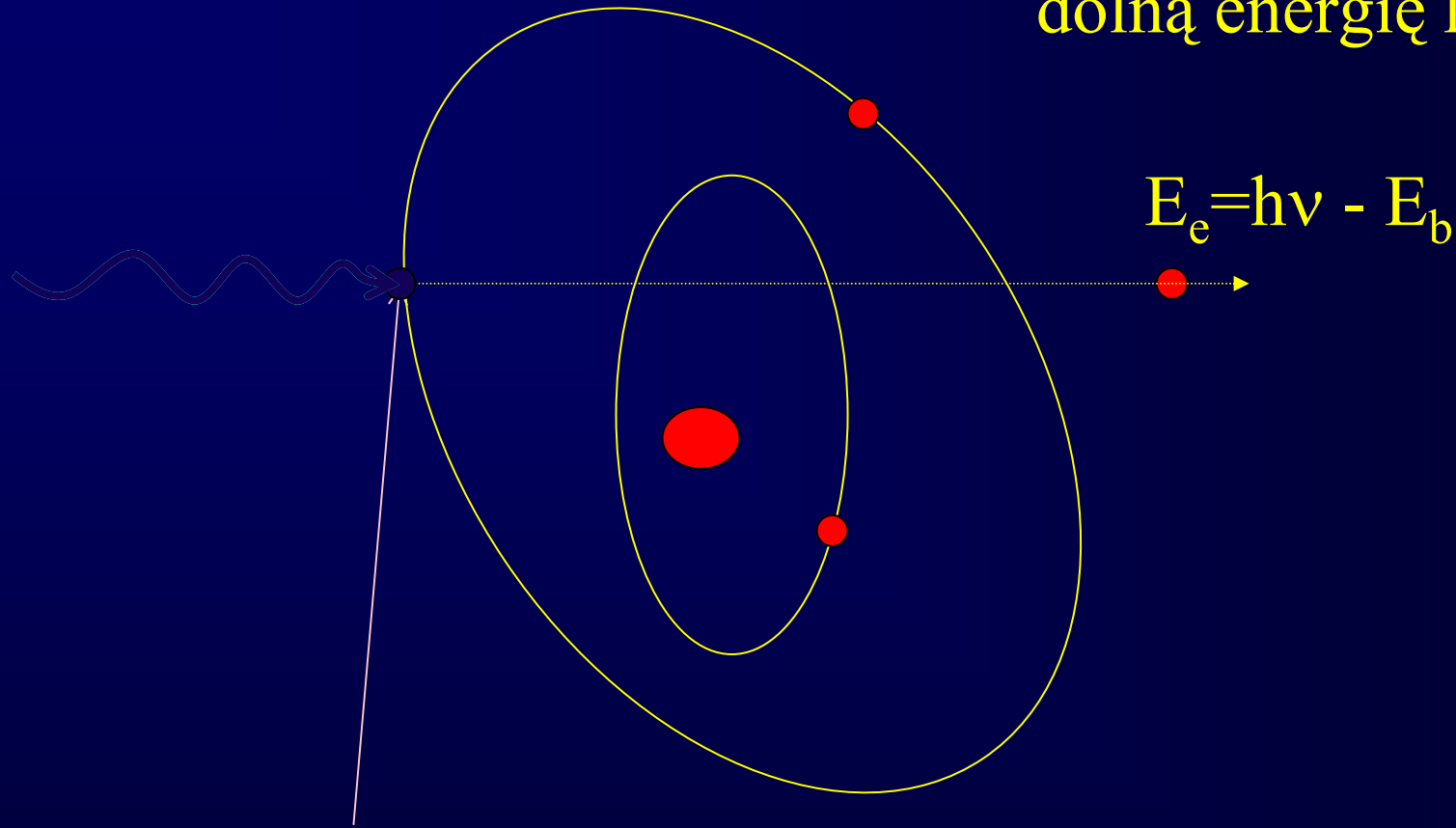
- zjawisko fotoelektryczne
- zjawisko Comptona
- zjawisko tworzenia par

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$



Zjawisko fotoelektryczne

wzór definiuje również
dolną energię kwantu



związany elektron

$$\sigma_f = c \frac{Z^h}{(\eta\omega)^k}$$

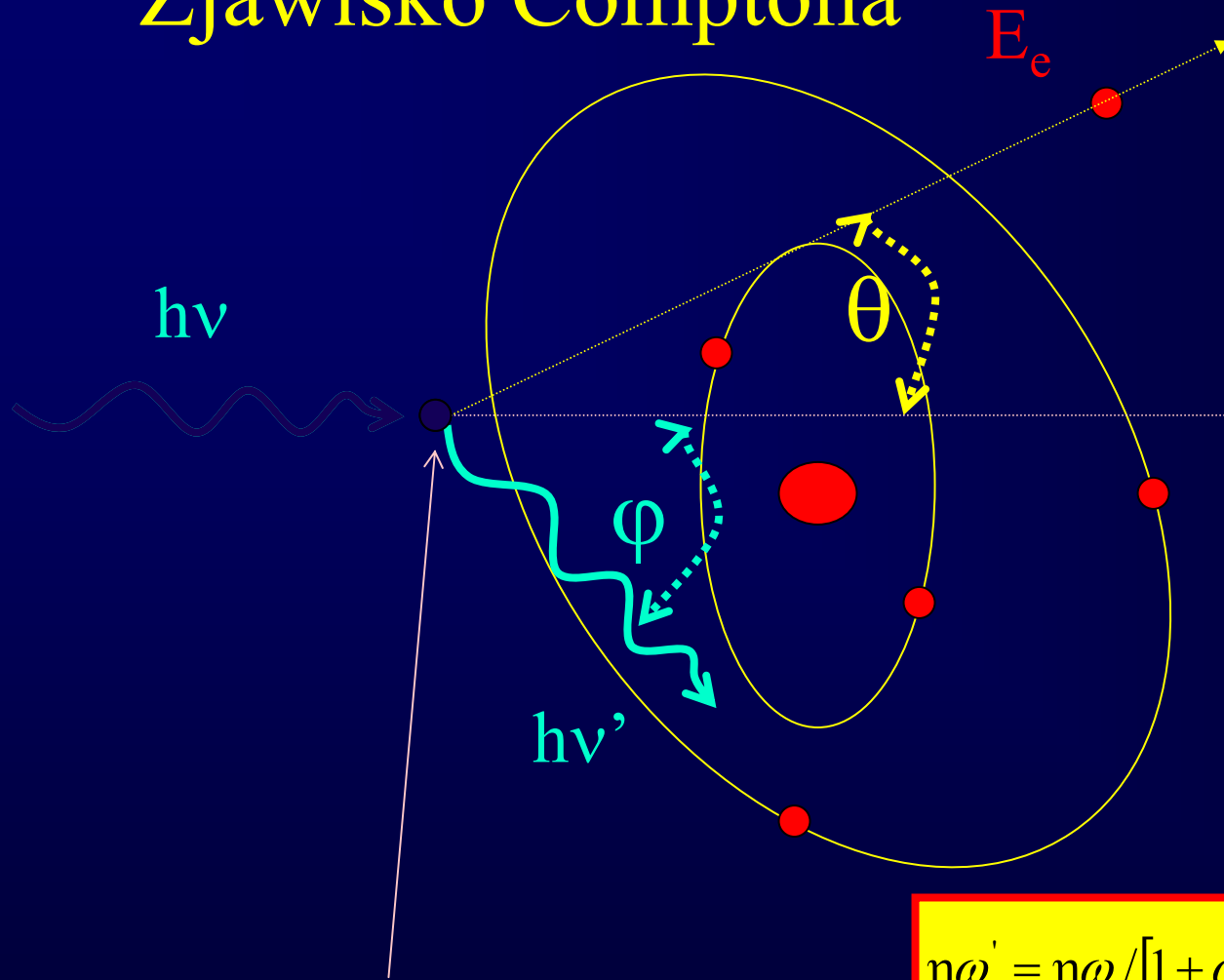
$$h \sim 4.0 - 4.6$$

,rosnie ze wzrostem $\eta\omega$

$$k \sim 3.5 - 1.0$$

,maleje ze wzrostem $\eta\omega$

Zjawisko Comptona



$$\eta\omega = \eta\omega' + E$$

$$\frac{\eta\omega}{c} = \frac{\eta\omega'}{c} \cos \varphi + p \cos \theta$$

$$0 = \frac{\eta\omega'}{c} \sin \varphi - p \sin \theta$$

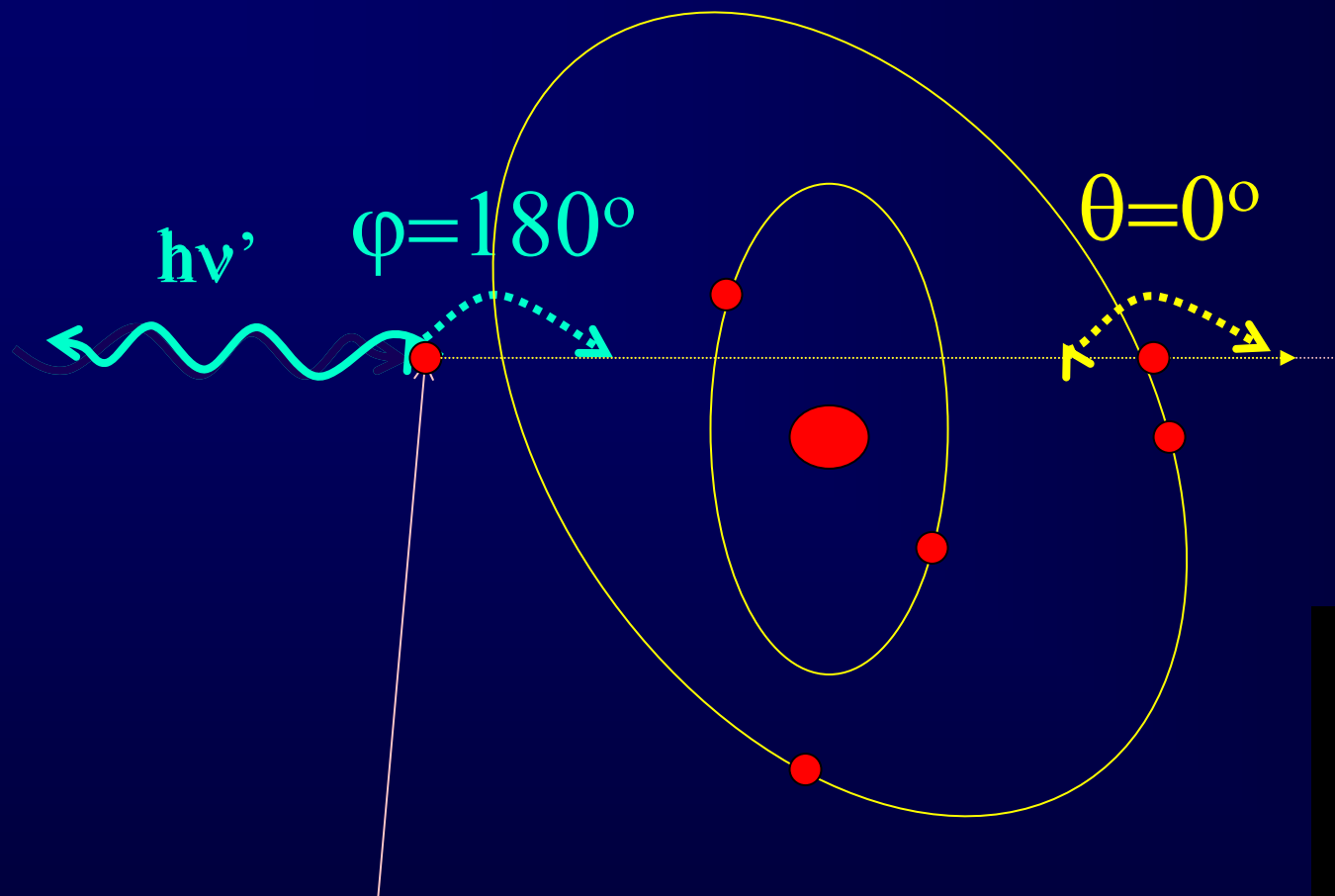
elektron swobodny

$$\eta\omega' = \eta\omega / [1 + \alpha(1 - \cos \varphi)],$$

$$\alpha = \frac{\eta\omega}{m_e c^2}$$

$$E = \eta\omega \frac{\alpha(1 - \cos \varphi)}{1 + \alpha(1 - \cos \varphi)}$$

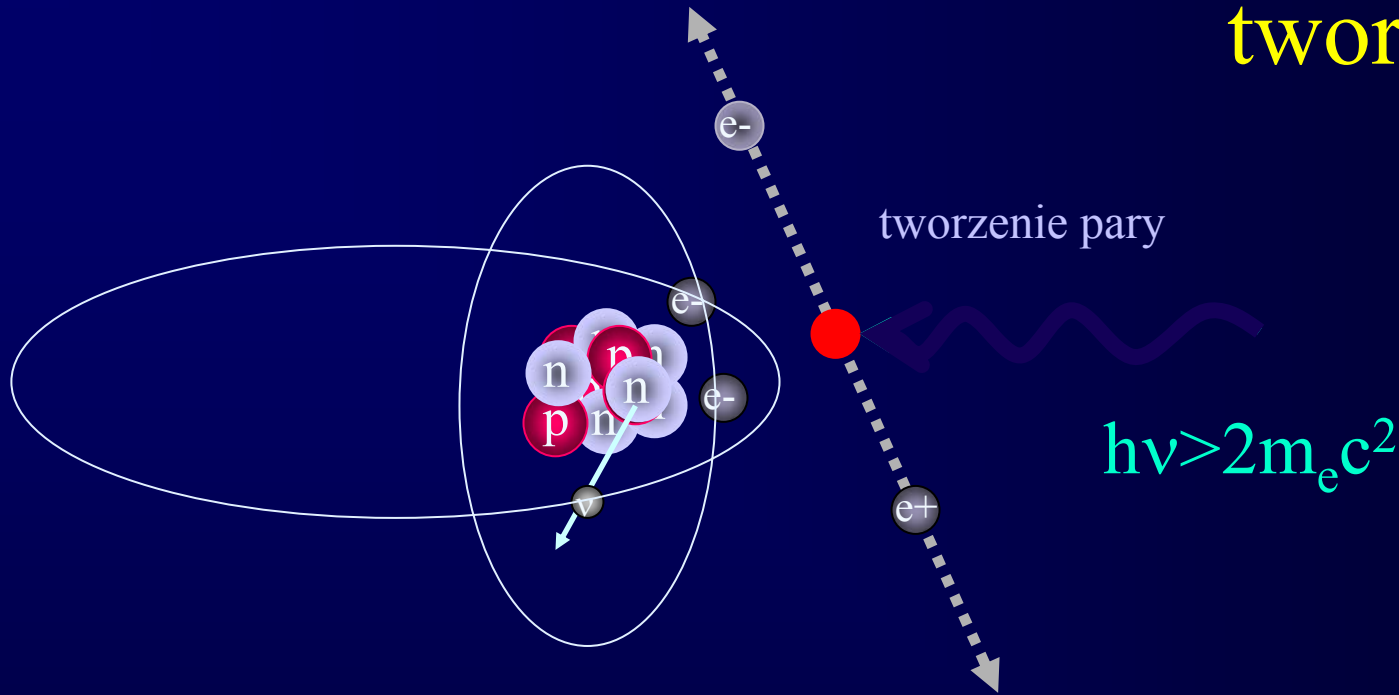
krawędź Comptonowska



elektron swobodny



Zjawisko tworzenia par



- zachodzi w obecności jądra, gdy $h\nu > 2m_e c^2$
- zachodzi w obecności elektronu, gdy $h\nu > 4m_e c^2$

$$E_e = \eta\omega - 2m_e c^2$$

- dla dużych energii

$$f = \frac{28}{9} \ln \frac{183}{Z^{1/3}} - \frac{2}{27}$$

$$\sigma_p \cong \frac{Z^2}{1720} f(\eta\omega)$$

Całkowity współczynnik absorpcji promieniowania γ

$$\sigma_t = (\sigma_f + Z\sigma_c + \sigma_p)$$

$$\mu = \mu_f + \mu_c + \mu_p$$

