Pojemność przewodnika

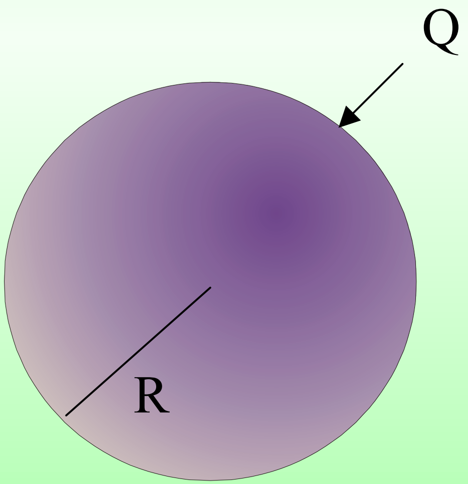
Powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną: $\varphi = const$

Stosunek ładunku Q zgromadzonego na powierzchni przewodnika do potencjału na powierzchni przewodnika nazywamy pojemnością C tego przewodnika:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi}}$$

$$[C] = 1F = 1\frac{C}{V}$$

farad (F)



Np. na powierzchni przewodnika w kształcie kuli o promieniu R:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \varphi_\infty \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\varphi_\infty = 0$$

Potencjał kuli przewodzącej (względem nieskończoności)

Kondensator

$C = 4\pi\varepsilon_0 R$

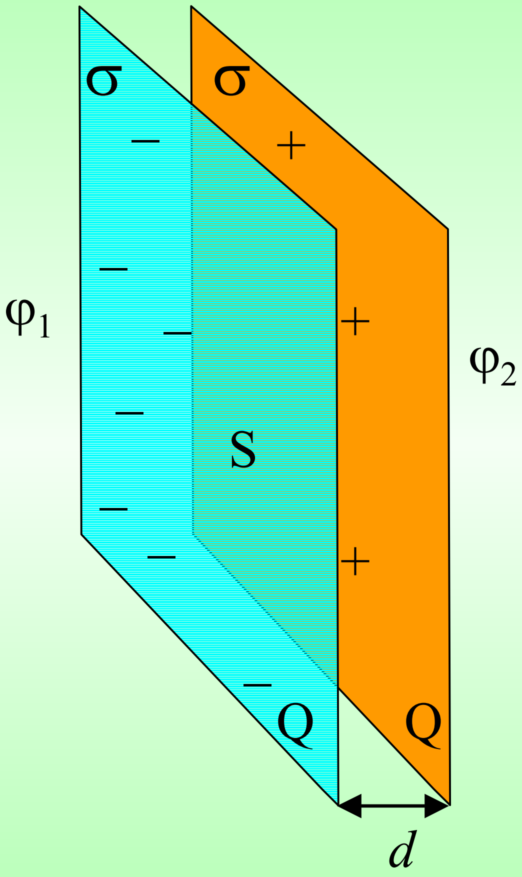
Potencjał kuli przewodzącej (względem nieskończoności). Można go potraktować, jako potencjał układu ładunków – zgromadzonego na powierzchni przewodnika + ładunek zgromadzony na powierzchni kuli o nieskończonym promieniu

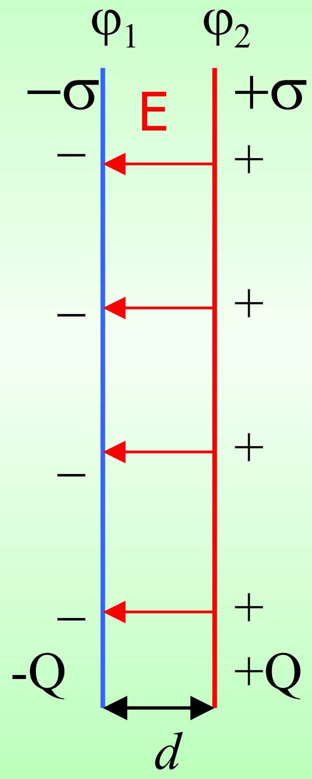
Układ dwóch blisko siebie położonych przewodników o różnych potencjałach φ_1, φ_2, na których zgromadzone są jednakowe co do wartości ładunki o przeciwnych znakach: Q i $-Q$.

Różnica potencjałów (napięcie) pomiędzy tymi dwoma przewodnikami wynosi:

$$U = \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Kondensator płaski





Pole pomiędzy płytkami jest jednorodne:

$$E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} = \frac{U}{d}$$

stąd: $U = Ed$

ale: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ gdzie $\sigma = \dfrac{Q}{S}$

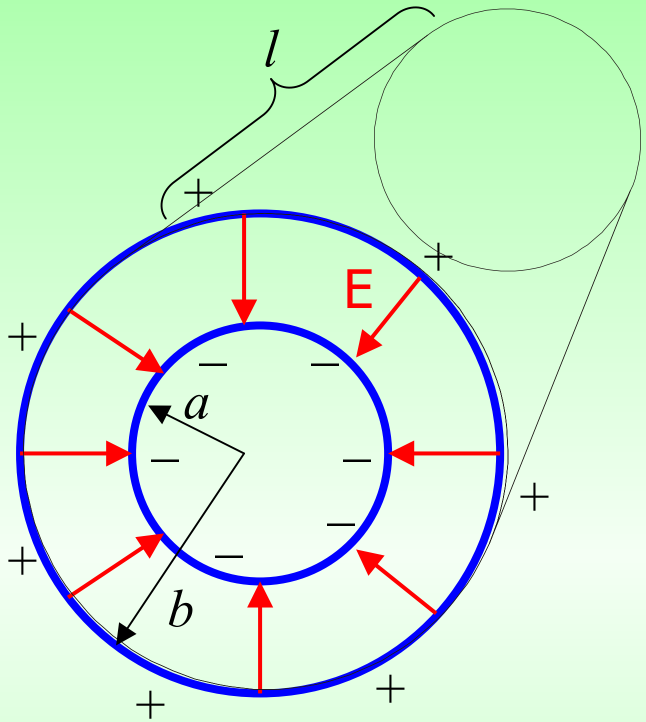
$$\boxed{U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

Kondensator cylindryczny

Pole między okładkami kondensatora (z prawa Gaussa):

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$



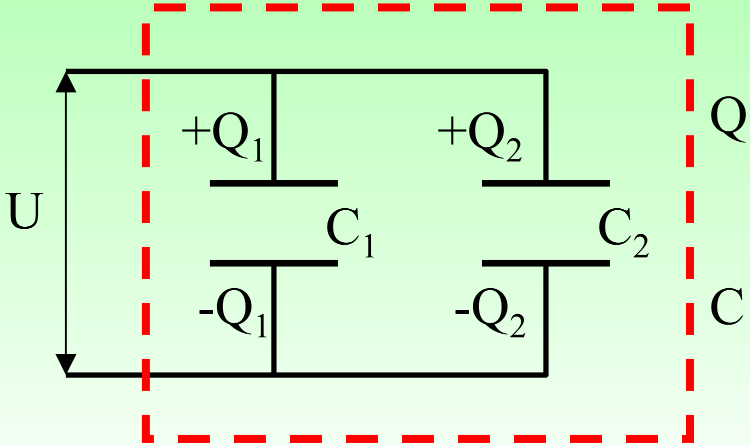
Różnica potencjałów okładek:

$$U = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

Stąd:

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}}$$

Łączenie kondensatorów - równoległe



Jaką pojemność *C* musi mieć pojedynczy kondensator, aby była ona równoważna pojemności całego układu?

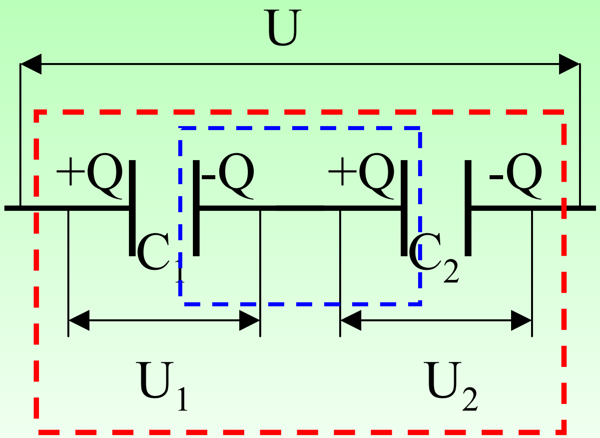
w warunkach równowagi:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \text{ale} \quad Q_1 = C_1 U, \quad Q_2 = C_2 U$$

$$\frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Ogólnie: $\boxed{C = \sum_i C_i}$

Łączenie kondensatorów - szeregowe



W kondensatorach połączonych szeregowo wartość bezwzględna ładunku na każdej płytce jest taka sama.

Wypadkowa różnica potencjałów:

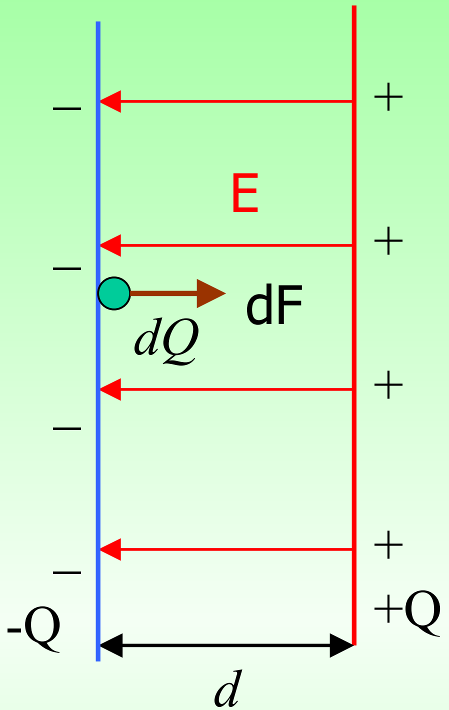
$$U = U_1 + U_2 \qquad \text{gdzie} \qquad U_1 = \frac{Q}{C_1}, \qquad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Ogólnie: $$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Energia kondensatora

Praca związana z przeniesieniem ładunku *dQ*
z jednej płytki na drugą wynosi:



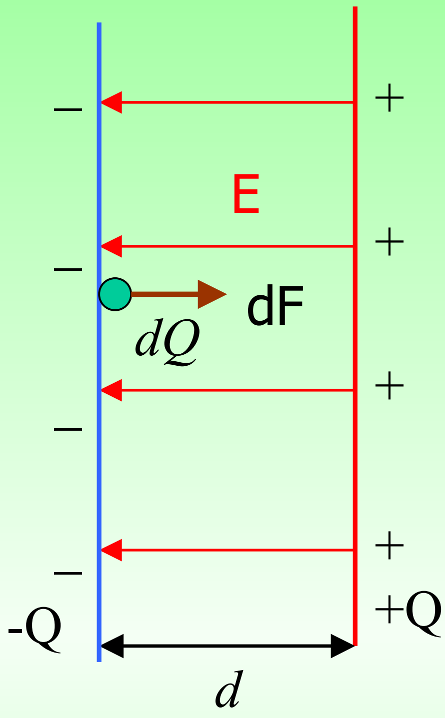
$$dW = dF \cdot d \qquad \text{gdzie} \qquad dF = dQ \cdot E = dQ \cdot \frac{U}{d}$$

$$dW = dQU = \frac{QdQ}{C}$$

$$\boxed{W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}}$$

Wykonana praca równa jest energii zgromadzonej w polu elektrycznym

Energia kondensatora



$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{V_{\text{Cała przestrzeń}}} \vec{E} \cdot \vec{E} dV$$ - energia pola elektrostatycznego

$$E = \frac{U}{d}$$

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{V} \vec{E}^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{V_w} E^2 dV$$

$$\vec{E} = const \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \int\limits_{V_w} dV = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2} Sd$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

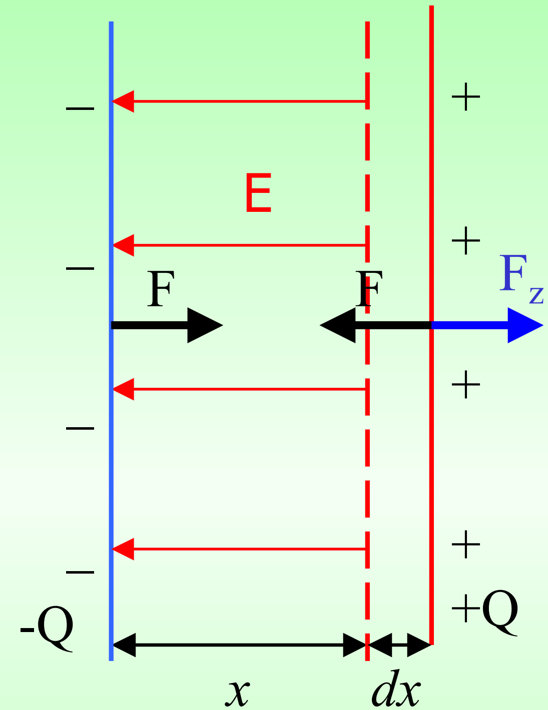
$$\boxed{E_p = \frac{CU^2}{2}}$$

$$\left(W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}\right)$$

Siły działające między płytkami kondensatora

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną F_z
przy przesunięciu jednej z płyt o odcinek dx:

$$dW = \vec{F}_z \cdot d\vec{x} = F_z dx \qquad \vec{F}_z = -\vec{F}$$



Zmiana energii (przy założeniu, że ładunek
nie ulega zmianie):

$$dE_p = -\frac{Q^2}{2C^2}dC \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}, \; dC = -\frac{\varepsilon_0 S}{x^2}dx$$

$$F_z dx = \frac{Q^2}{2\left(\frac{\varepsilon_0 S}{x}\right)^2}\frac{\varepsilon_0 S}{x^2}dx = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}dx \quad \text{ale} \quad \frac{Q}{S} = \sigma$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2}Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}QE}$$