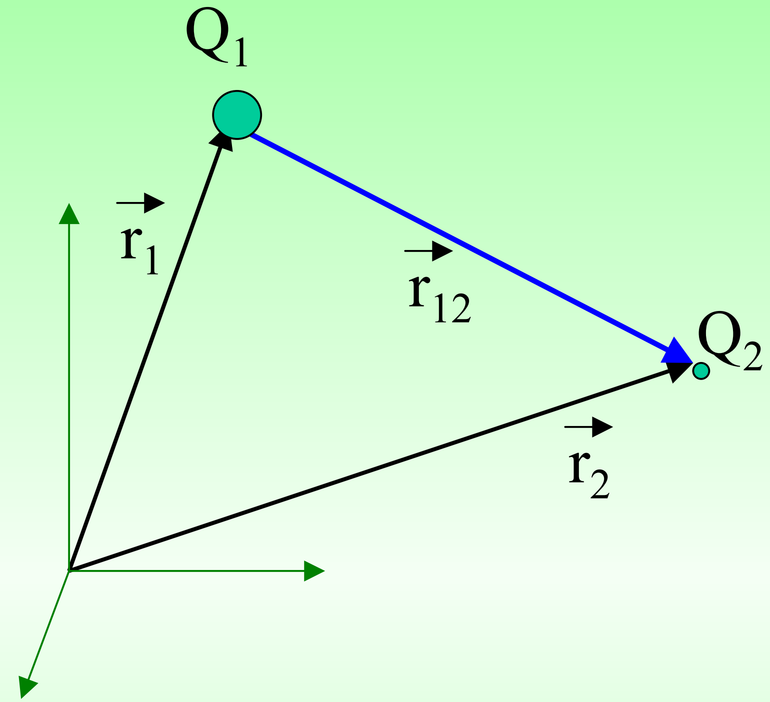
Energia potencjalna układu dwóch ładunków punktowych



Budujemy układ dwóch ładunków punktowych w „pustej" przestrzeni:

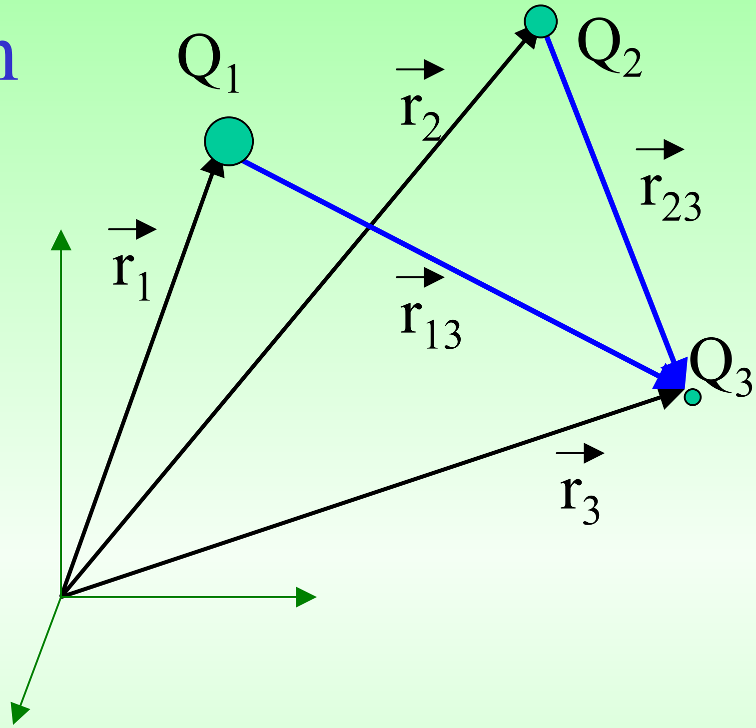
1. Wprowadzenie pierwszego ładunku Q_1 nie wymaga wykonania pracy.
2. Wprowadzenie drugiego ładunku Q_2 wymaga wykonania pracy:

$$W = -\int_{r_\infty}^{r_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_\infty}\right)$$

$$\frac{1}{r_\infty} \to 0 \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}}}$$

- energia potencjalna układu dwóch ładunków

Elektrostatyczna energia potencjalna układu trzech ładunków punktowych



Np. wprowadzamy kolejny ładunek Q_3.
Praca wykonana przy sprowadzeniu ładunku Q_3 wynosi:

$$W_3 = -\int_{r_\infty}^{r_3} \vec{F}_3 \cdot d\vec{s} = -\int_{r_\infty}^{r_3} \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}\right) \cdot d\vec{s}$$

$$W_3 = -\int_{r_\infty}^{r_3} \vec{F}_{13} \cdot d\vec{s} - \int_{r_\infty}^{r_3} \vec{F}_{23} \cdot d\vec{s}$$

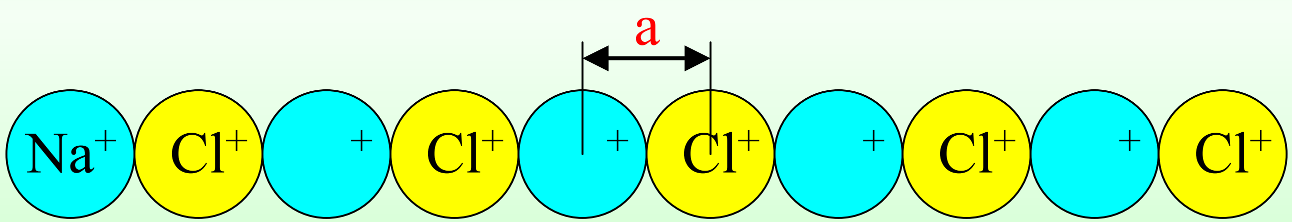
Stąd

$$\boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}}$$

Elektrostatyczna energia potencjalna układu wielu ładunków punktowych

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{j}^{N}\sum_{k \neq j}\frac{Q_j Q_k}{r_{jk}}$$

Np. elektrostatyczna energia potencjalna liniowego kryształu złożonego z jonów Na^+ i Cl^-

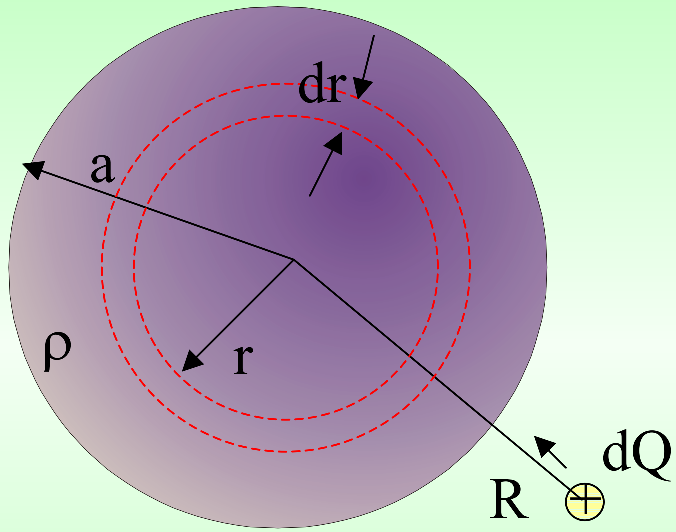


$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}\left(-\frac{2}{1}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{4}-\ldots\right) = -\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots\right)$$

$$E_p = -\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

Elektrostatyczna energia ładunków. Kula jednorodna.

$$\rho = const$$



$$dE_p = dW = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_r dQ}{r}$$

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$dE_p = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0}$$

$$E_p = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0},$$

ale $Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$

$$\boxed{E_p = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

Energia w polu elektrostatycznym.

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{j}^{N}\sum_{k \neq j}\frac{Q_j Q_k}{r_{jk}}$$

Dla ciągłego rozkładu ładunku:

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\int_{V\ \text{cała przestrzeń}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2}$$

$$\int_V \frac{\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} dV_2 = \varphi(1)$$

$\rho(1), \varphi(1), \rho(2), \varphi(2)$ gęstość ładunku i potencjał pola w punktach (1) i (2)

$$E_p = \frac{1}{2}\int_V \rho(1)\varphi(1) dV_1$$

Ponieważ nie zależy od punktu (2) możemy zapisać:

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\int_{V_{\text{cała przestrzeń}}} \rho\varphi dV}$$

Równanie Poissona.

Twierdzenie Gaussa:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 \equiv \Delta \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

operator Laplace'a

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Równanie Poissona

Jeżeli $\rho = 0$ to $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ Równanie Laplace'a

Energia w polu elektrostatycznym cd.

$$E_p = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi \vec{\nabla}^2 \varphi dV$$

gdzie

$$\varphi \vec{\nabla}^2 \varphi = \varphi\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)$$

ale $\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \left(\varphi \vec{\nabla} \varphi\right) - \left(\vec{\nabla} \varphi\right) \cdot \left(\vec{\nabla} \varphi\right)$$

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\vec{\nabla} \varphi\right) \cdot \left(\vec{\nabla} \varphi\right) dV - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\varphi \vec{\nabla} \varphi\right) dV$$

Energia w polu elektrostatycznym cd.

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\right)dV - \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\varphi\vec{\nabla}\varphi\right)dV}$$

Z twierdzenia Gaussa: $\boxed{\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\varphi\vec{\nabla}\varphi\right)dV} = \int_S \left(\varphi\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\vec{n}\,da$

Szacujemy całkę powierzchniową, gdy $S \to \infty$
(Wszystkie ładunki znajdują się w skończonej odległości, całkujemy po powierzchni kulistej)

$$\varphi \propto \frac{1}{R}, \quad \vec{\nabla}\varphi = \vec{E} \propto \frac{1}{R^2}, \quad S \propto R^2,$$

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\varphi\vec{\nabla}\varphi\right)dV \to 0}$$

$$\boxed{E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\right)dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V\ \text{cała przestrzeń}} \vec{E}\cdot\vec{E}\,dV}$$

Gęstość energii pola elektrostatycznego

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\right)dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{E}dV$$

Każdy element objętości *dV=dxdydz* zawiera w polu elektrycznym energię:

$$\boxed{e_p = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2}$$

gęstość energii pola elektrostatycznego

Energia potencjalna ładunku punktowego a siła działająca na ten ładunek

$$E_p = W = -\int_{\infty}^{R} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -Q\int_{\infty}^{R} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = Q\varphi(\vec{r})$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r}) = -Q\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}Q\varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}E_p(\vec{r})$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}E_p(\vec{r})}$$