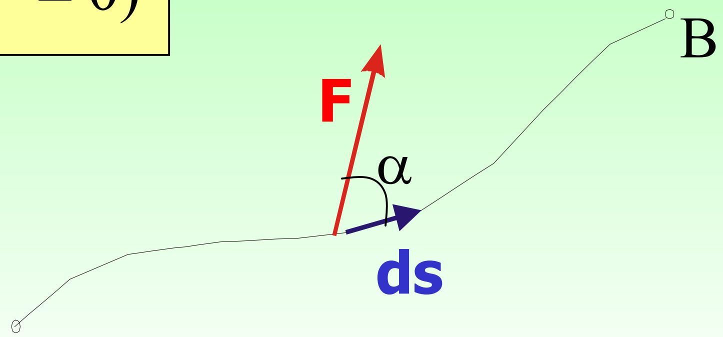
Definicja pracy

Elementarna praca siły ***F*** związana z przesunięciem ciała o odcinek ***dl***:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos\alpha \qquad (\alpha = 0 \Rightarrow dW = 0)$$

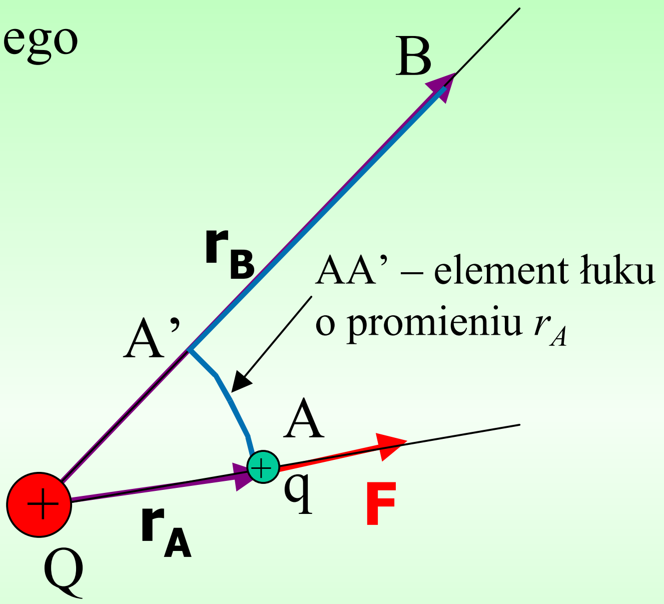


Pracę siły ***F*** związaną z przesunięciem ciała wzdłuż toru AB wyraża całka krzywoliniowa:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Praca w polu elektrycznym

Praca związana z przesunięciem ładunku z punktu A do B w polu ładunku punktowego Q (bez zmiany jego energii kinetycznej):



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_A^{A'} \vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_{A'}^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

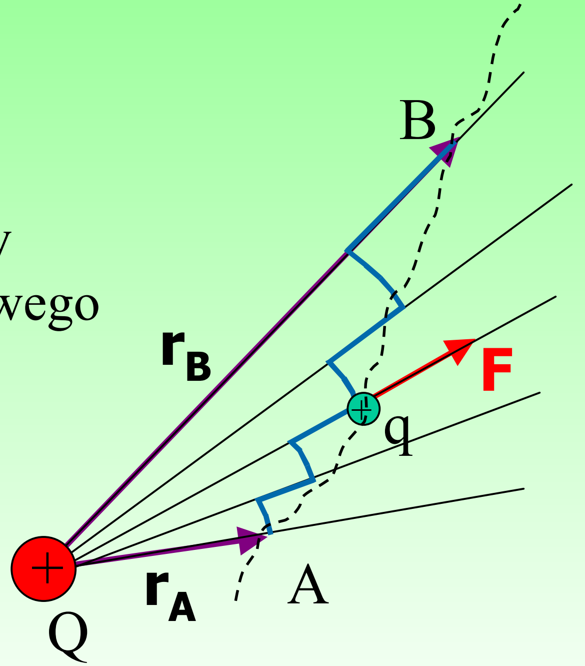
$$\vec{F} \perp d\vec{s} \Rightarrow -\int_A^{A'} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\boxed{-\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_{A'}^B \frac{1}{r^2}dr = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

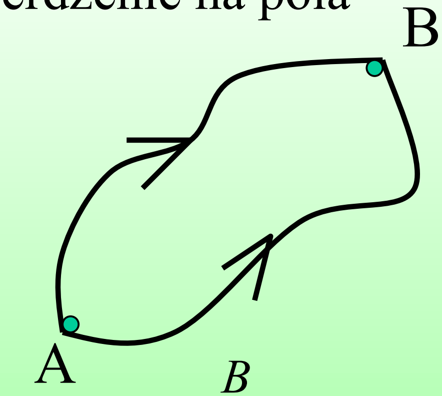
Praca w polu elektrycznym

Przy przeniesieniu ładunku *q* z punktu A do B (bez zmiany energii kinetycznej) w polu elektrycznym ładunku punktowego *Q* zawsze wykonujemy tę samą pracę.

$$-\int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_{A'}^{B}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$



Korzystając z zasady superpozycji można uogólnić to stwierdzenie na pola wytworzone przez dowolne rozkłady ładunku



Praca związana z przemieszczeniem ładunku *q* z punktu A do B (bez zmiany energii kinetycznej) w polu elektrycznym nie zależy od toru po którym przemieszcza się ładunek, a jedynie od położenia punktów końcowych.

Pole elektryczne jest polem zachowawczym.

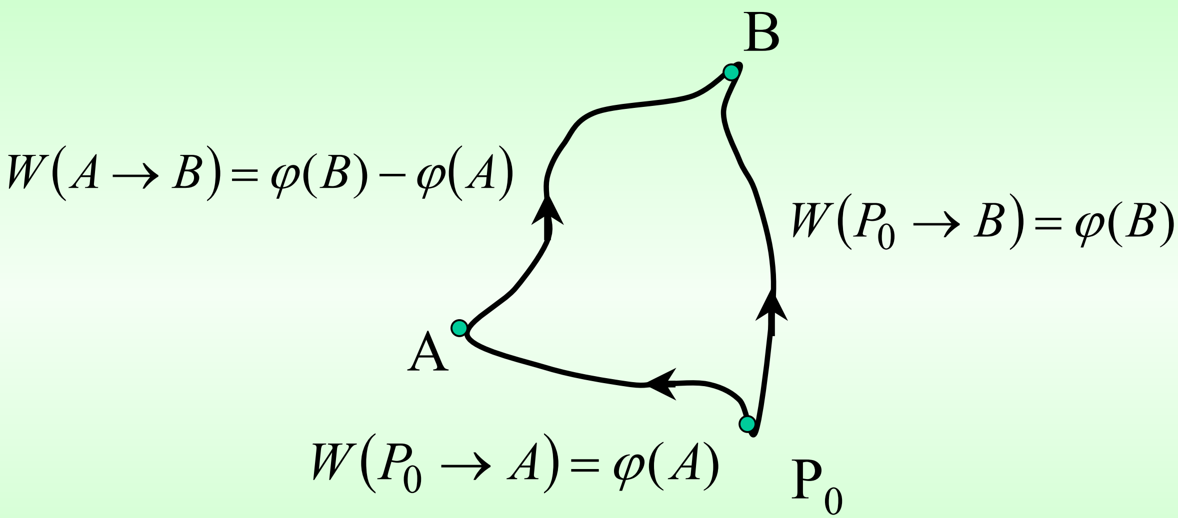
$$W_{AB} = -\int_{A}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

dowolna droga

Potencjał elektryczny

Praca wykonana przy przeniesieniu ładunku jednostkowego między punktami *A* i *B*:

$$W_{AB}^{jedn} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \varphi_B - \varphi_A$$



Jeżeli obierzemy punkt P_0 to liczba φ będzie określona dla każdego punktu przestrzeni, tzn. φ jest polem skalarnym φ (x,y,z):

Potencjał elektryczny

$$\varphi(A) = -\int_{P_0}^{A} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$[\varphi] = 1V = \frac{1J}{1C}$$

Różnica potencjałów a natężenie pola elektrycznego

Praca związana z przesunięciem ładunku jednostkowego o Δx:

$$\Delta W = \varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Delta x$$

ale: $$\Delta W = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = -E_x \Delta x$$

Stąd: $$\boxed{E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$ $$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi}$$

Zatem: $$\boxed{\int_A^B \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)}$$

Potencjał elektryczny układu ładunków punktowych

Potencjał pola wytworzonego przez ładunek punktowy:

$$\varphi(x,y,z) = -\int_{r_\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji pole elektrostatyczne wytworzone przez dowolny rozkład ładunków można traktować jako sumę pól wytworzonych przez ładunki punktowe.

układ ładunków punktowych w punkcie *1*:

$$\varphi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_j}{r_{1j}}$$

ładunek o rozkładzie ciągłym:

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}$$

Potencjał elektryczny dipola elektrycznego

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-l/2\right]^2}}-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z+l/2\right]^2}}\right\}$$

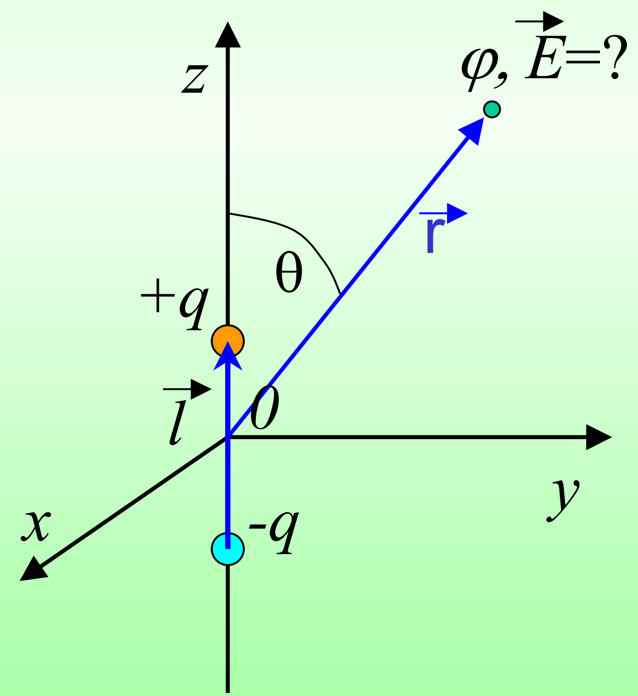
Zakładamy:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad \text{oraz} \qquad l<<r$$

Stąd:

$$\left(z-l/2\right)^2=z^2-zl$$

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{l}{2}\right)^2\approx r^2-zl=r^2\left(1-\frac{zl}{r^2}\right)$$



Potencjał elektryczny dipola elektrycznego

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}}\approx\frac{1}{r}\left(1-\frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}\frac{zl}{r^2}\right)$$

wykorzystujemy rozwinięcie dwumianowe: $\left(1-\frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{zl}{r^2}$

Podobnie:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+\frac{l}{2}\right)^2}}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{zl}{r^2}\right)$$

$$\boxed{\varphi(x,y,z)=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

$$\boxed{p\cos\theta=\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r}}$$

$$z=r\cos\theta$$

Pole dipola elektrycznego

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

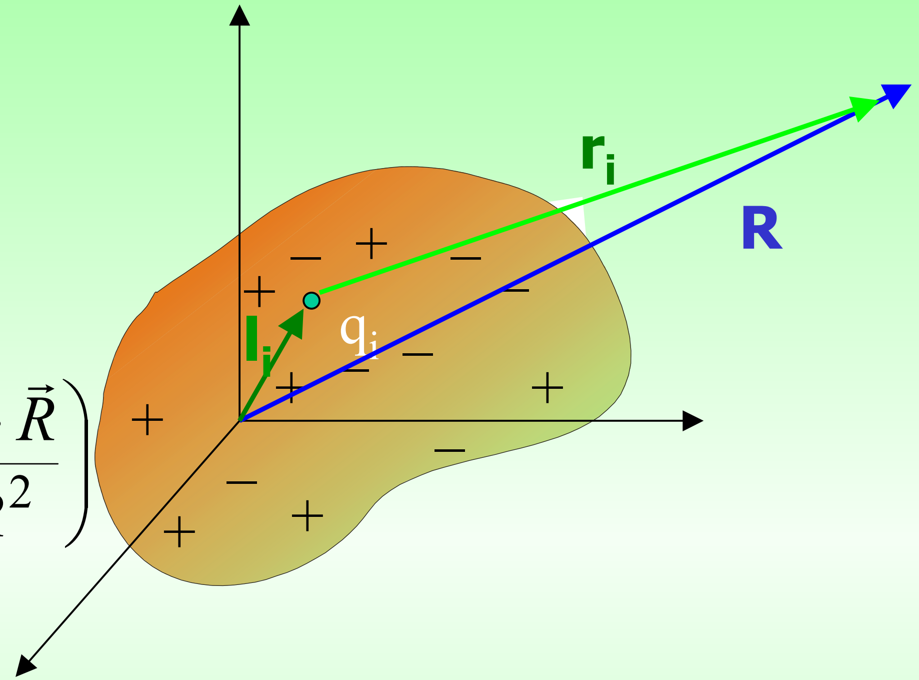
$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{r^5}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{r^5},$$

$$E_\perp = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z}{r^5}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos\theta\sin\theta}{r^3}$$

składowa transwersalna

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_\perp^2}$$

Przybliżenie dipolowe dowolnego rozkładu ładunków



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$r_i \approx R - \vec{l}_i \cdot \frac{\vec{R}}{R}, \qquad \frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\vec{l}_i \cdot \vec{R}}{R^2}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_i \frac{q_i}{R} + \sum_i q_i \frac{\vec{l}_i \cdot \vec{R}}{R^3} + \ldots\right)$$

$$Q = \sum_i q_i, \qquad \vec{p} = \sum_i q_i \vec{l}_i$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3} + \ldots\right)$$

Drugi wyraz rozwinięcia może być różny od zera nawet gdy Q jest równy zero, np. cząsteczka wody ma duży moment dipolowy

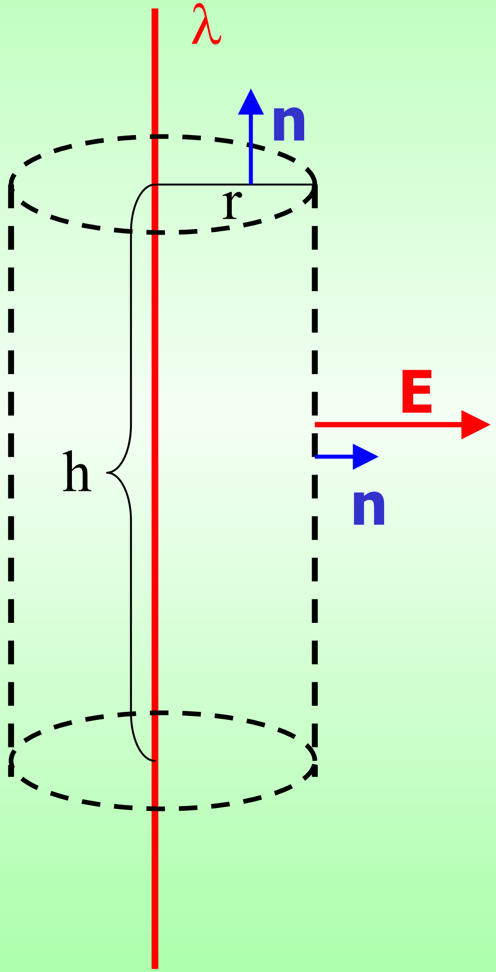
Potencjał elektryczny ładunku o rozkładzie liniowym

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$E = E(r) \Rightarrow E = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}$$

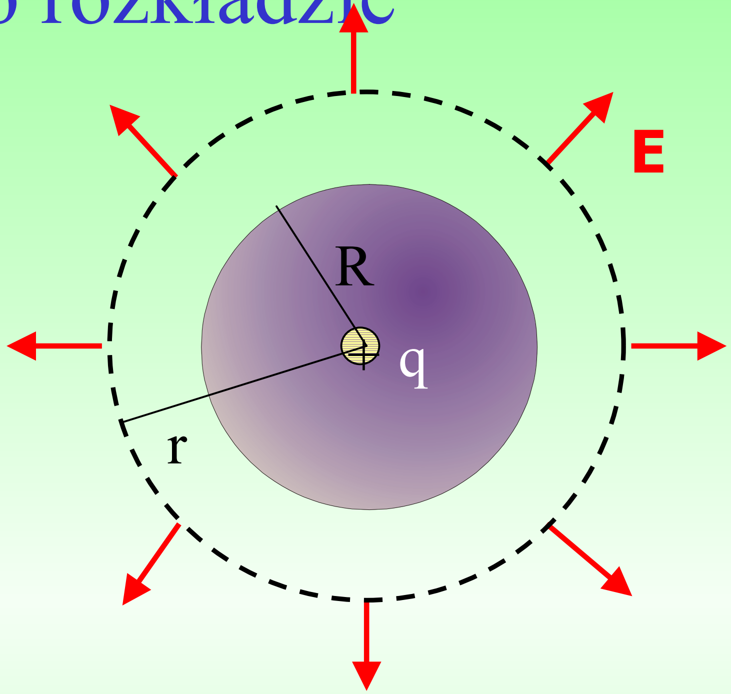
$$\varphi(r) = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r} + const$$



Potencjał elektryczny ładunku o rozkładzie kulistosymetrycznym

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_{V(r)}\rho(r)dV$$



$$E = E(r) \Rightarrow E = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, & r > R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}, & r = R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_{V(r)}\rho(r)dV, & r < R \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + const, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + const, \\ -\int Edr \end{cases}$$

różne rozwiązania w zależności od ρ(r)

Bezwirowość pola elektrostatycznego

$$\oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_{S} \left(\vec{\nabla} \times \vec{C}\right) \cdot \vec{n} da$$

Twierdzenie Stokesa: Krążenie $\vec{\mathbf{C}}$ wzdłuż krzywej Γ jest całką powierzchniową składowej normalnej rotacji $\vec{\mathbf{C}}$**.**

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \Rightarrow \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot \vec{n} ds = \int_{S} \left[\vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla}\varphi\right)\right] \cdot \vec{n} ds = 0}$$

Stąd:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

II równanie Maxwella dla pola elektrostatycznego

Pole elektrostatyczne jest polem bezwirowym.